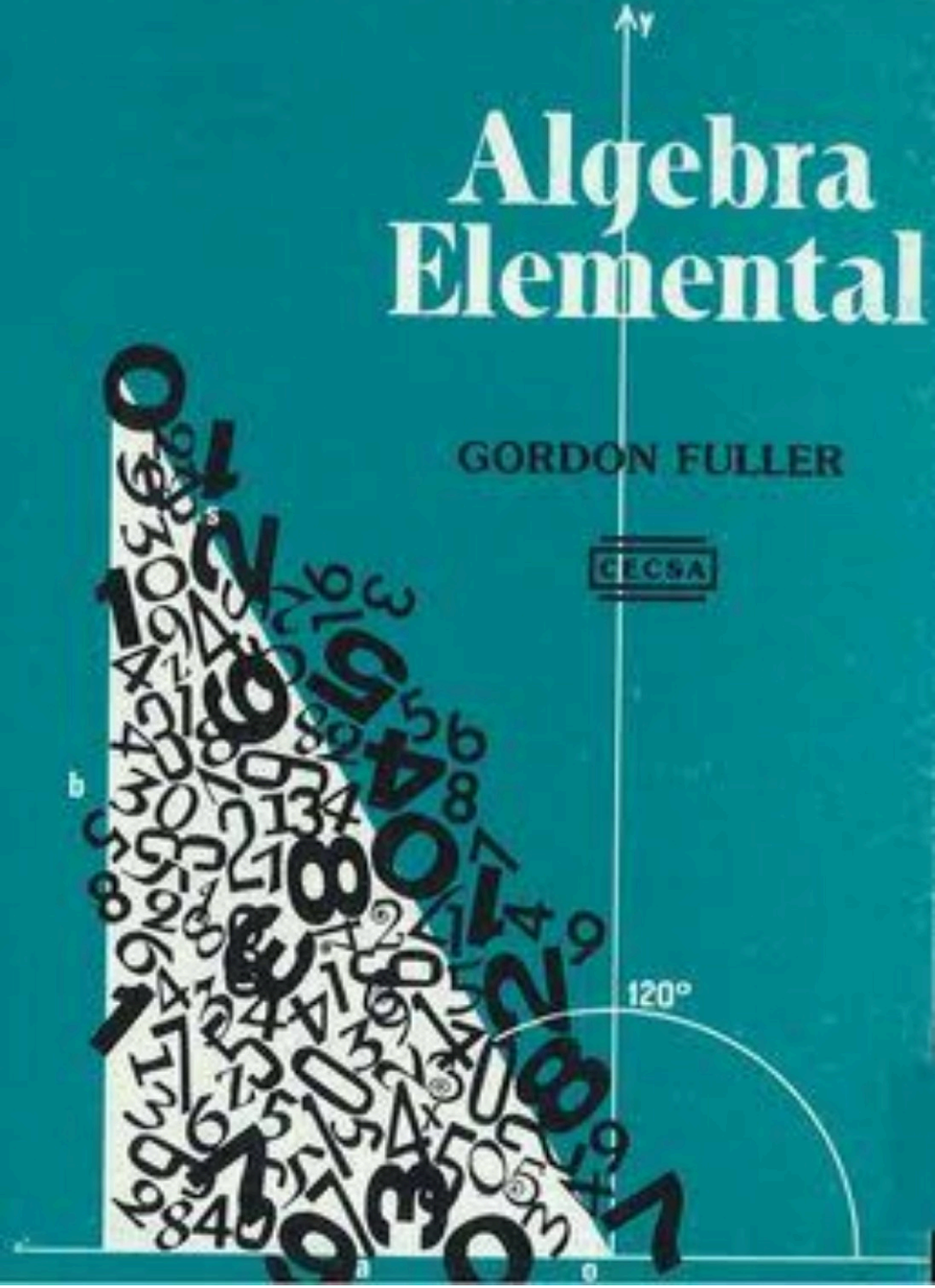
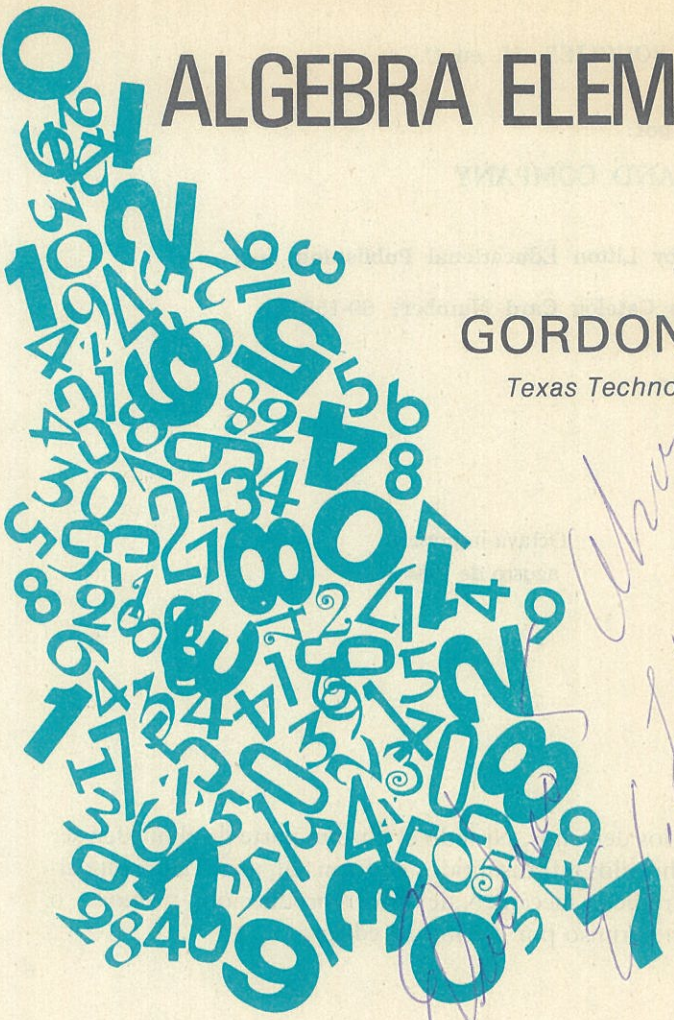
# Algebra Elemental

GORDON FULLER

CECSA



# ALGEBRA ELEMENTAL




GORDON FULLER

*Texas Technological University*



CIA. EDITORIAL CONTINENTAL, S. A. DE C. V., MEXICO

DISTRIBUIDORES:

ESPAÑA – ARGENTINA – CHILE – VENEZUELA – COLOMBIA
PERU

Bolivia — Brasil — Costa Rica — Dominicana — Ecuador — El Salvador — Estados Unidos
Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá — Paraguay — Portugal — Puerto Rico
Uruguay

Título original en inglés:

COLLEGE ALGEBRA

Traducido por:

ANDRES SESTIER BOUCLIER, M. en C.

Edición autorizada por:

D. VAN NOSTRAND COMPANY

Copyright © 1974 by Litton Educational Publishing, Inc.

Library of Congress Catalog Card Number: 69-15871

Octava impresión
agosto de 1984

Reservados todos los derechos. Ni todo el libro ni parte de él pueden ser reproducidos, archivados o transmitidos en forma alguna o mediante algún sistema electrónico, mecánico de fotorreproducción, memoria o cualquier otro, sin permiso por escrito del editor.

*Derechos Reservados © en Lengua Española–1977, Primera Publicación*

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A. DE C. V.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

# PREFACIO A LA TERCERA EDICION

Esta edición de *College Algebra,* como las anteriores, fue planeada para estudiantes universitarios de primer año cuya preparación en álgebra, insuficiente, no les permita iniciar el estudio de la geometría analítica y el cálculo. La nueva edición, sin embargo, ha sido "modernizada" con el énfasis que se da a los conceptos básicos, procedimientos y terminología. Este enfoque, junto con lenguaje y definiciones precisas, hace posible una cantidad razonable de rigor que a su vez facilita el dominio de las técnicas esenciales empleadas en el campo convencional del álgebra elemental.

En el primer capítulo se introduce el concepto de conjunto. El tratamiento, aunque breve, basta para el uso que se da al concepto en los capítulos siguientes. La notación de conjuntos y las operaciones sobre conjuntos se introducen en varias partes donde son susceptibles de promover entendimiento del lector y simplificar en alguna forma el lenguaje.

En el Cap. 2 se tratan los axiomas de campo de los números reales y algunos teoremas basados en ellos. Esta discusión abre el camino a la justificación de las operaciones fundamentales que se practican sobre las expresiones algebraicas. Aunque los estudiantes en esta etapa han estado usando los axiomas y los teoremas, son muchos los que no aprecian la naturaleza básica de los axiomas desde el momento en que no perciben que los teoremas son una consecuencia de aquéllos. Hemos recalcado la dependencia de los teoremas con respecto a los axiomas enunciando de modo formal todos los teoremas necesarios y refiriéndonos libremente a los axiomas al hacer las demostraciones. El material de este capítulo se cubrirá de acuerdc con la clase que esté tomando el curso. Como mínimo, sin embargo, se logrará que los estudiantes, conociendo los axiomas y entendiendo los enunciados contenidos en los teoremas, comenzarán a considerar el álgebra elemental como una estructura lógica, lo cual es una primera visión de la naturaleza de las matemáticas.

Muchos capítulos tratados al nivel del álgebra intermedia siguen al Cap. 2 Por tanto, en el Cap. 10 introducimos los axiomas de orden de los números reales y derivamos ciertos teoremas basados en los axiomas. Esto abre el camino al problema de las desigualdades. Incluidas en esa discusión, están las desigualdades de una y dos variables y también los sistemas de desigualdades.

En esta edición se tocan todos los temas tratados en las anteriores, pero el tratamiento de los mismos ha sido considerablemente mejorado. El nuevo material proporciona una base para el tratamiento mejorado del material convencional de las ediciones precedentes.

Damos una lista de otros aspectos notables del libro:

1. Se definen funciones y relaciones como conjuntos de parejas ordenadas de números, haciendo una distinción muy clara entre los dos conceptos.

2. Se da una discusión cuidadosa de las operaciones sobre las ecuaciones que conducen a ecuaciones equivalentes, y también sobre sistemas de ecuaciones que conducen a sistemas equivalentes.

3. Hemos logrado una presentación más satisfactoria de la probabilidad procediendo a partir de ciertos axiomas y usando la idea de conjuntos y subconjuntos.

4. Los números complejos se tratan en forma muy adecuada. Aunque se presenta la forma $(a, b)$ tempranamente, la discusión principal involucra la forma rectangular $a + bi$ y la forma polar $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Se da atención al hecho de que los números complejos obedecen a los axiomas de campo del Cap. 2.

5. En el Cap. 16 aparece una introducción al álgebra de matrices y demostraciones de las propiedades más importantes de los determinantes de las matrices.

6. Los logaritmos se tratan con amplitud recalcando los aspectos teóricos.

7. La exposición está hecha en su totalidad en un lenguaje sencillo y claro. Cada tema nuevo se ilustra de manera amplia con problemas resueltos, habiéndose planeado con cuidado los ejemplos para evidenciar los principios involucrados y quitar del camino algunos puntos molestos o problemáticos. De hecho, la organización y exposición son tales que el material es ampliamente autodidáctico, dejando así al profesor más tiempo para ayudar en los pasos difíciles y para profundizar la visión del estudiante recalcando las razones subyacentes.

8. En cuanto al texto propiamente dicho, se cuidó con extrema meticulosidad el planeamiento de los ejercicios, cada uno de los

:uales tiene problemas abundantes. Las respuestas a los problemas mpares se han incluido en el texto, y las respuestas pares se pro- )orcionan en un manual para el instructor.

9. Todas las tablas numéricas necesarias —potencias y raíces le números, logaritmos comunes de números y valores de funciones rigonométricas— se proporcionan dentro del libro.

10. El libro es suficientemente flexible para que la selección de naterial se adapte a clases de diversos grados y preparación. Algu- ios estudiantes necesitarán invertir tiempo considerable en los Caps. 3 hasta el 8, mientras que otros, pueden revisar estos capítulos ·ápidamente (o aun omitirlos) y tener tiempo de sobra para cubrir a mayoría de los capítulos restantes, asegurando así una fundamen- :ación prometedora para el estudio del cálculo y otras áreas de las natemáticas. Aunque la práctica más común es la de impartir tres ecciones a la semana durante un semestre, hay material en abundan- :ia para estudiantes que deseen o necesiten cuatro o cinco clases )or semana.

# INDICE DE MATERIAS


| Capítulos | | Págs. |
|---|---|---|
| | Prefacio a la Tercera Edición | 5 |
| **1** | **Conjuntos y Operaciones** | **13** |
| 1-1 | Conjuntos | 13 |
| 1-2 | Conjuntos Relacionados | 14 |
| 1-3 | Operaciones sobre los Conjuntos | 17 |
| **2** | **Los Números Reales** | **21** |
| 2-1 | Un Sistema Deductivo | 21 |
| 2-2 | Axioma de Campo de los Números Reales | 23 |
| 2-3 | Consecuencias Inmediatas de los Axiomas de Campo | 26 |
| 2-4 | Números Racionales e Irracionales | 33 |
| 2-5 | El Eje Numérico Real | 36 |
| **3** | **Operaciones en las Expresiones Algebraicas** | **41** |
| 3-1 | Algunas Definiciones | 41 |
| 3-2 | Adición y Sustracción | 42 |
| 3-3 | Multiplicación | 46 |
| 3-4 | División | 48 |
| 3-5 | Productos Especiales | 53 |
| **4** | **Factorización y Operaciones con las Fracciones** | **57** |
| 4-1 | Tipos Simples de Factorización | 57 |
| 4-2 | Trinomio General de Segundo Grado | 59 |
| 4-3 | Factorización por Agrupamiento | 60 |
| 4-4 | Fracciones Algebraicas | 62 |
| 4-5 | Reducción a Términos Mínimos | 62 |
| 4-6 | Multiplicación y División de Fracciones | 64 |
| 4-7 | Adición de Fracciones | 67 |
| 4-8 | Fracciones Complejas | 70 |
| **5** | **Funciones y Relaciones** | **75** |
| 5-1 | Coordenadas Rectangulares | 75 |
| 5-2 | Relaciones y Funciones | 77 |

5-3 Gráficas de Funciones y Relaciones ..... 81
5-4 La Fórmula de la Distancia y el Círculo ..... 85

**6 Ecuaciones Lineales** ..... **91**

6-1 Ecuaciones Condicionales e Identidades ..... 91
6-2 Operaciones con Ecuaciones ..... 92
6-3 Ecuaciones Lineales en una Variable ..... 93
6-4 Problemas en Palabras ..... 96
6-5 Ecuaciones Lineales en Dos Variables ..... 100
6-6 Solución por Métodos Algebraicos ..... 103
6-7 Ecuaciones Lineales con Tres Incógnitas ..... 106
6-8 Problemas en Palabras que Conducen a Sistemas de Ecuaciones Lineales ..... 108
6-9 Razón y Proporción ..... 111
6-10 Variación ..... 114

**7 Exponentes y Radicales** ..... **121**

7-1 Leyes de los Exponentes ..... 121
7-2 Exponentes Enteros Negativos y Cero ..... 122
7-3 Exponentes Fraccionarios ..... 124
7-4 Leyes de los Radicales ..... 127
7-5 Adición y Sustracción de Radicales ..... 130
7-6 Multiplicación y División de Radicales ..... 131
7-7 Números Complejos ..... 133

**8 Ecuaciones Cuadráticas** ..... **139**

8-1 Solución por Factorización ..... 139
8-2 Solución Usando Fórmula ..... 140
8-3 Ecuaciones en Forma Cuadrática ..... 144
8-4 Ecuaciones Conteniendo Radicales ..... 146
8-5 Naturaleza de las Raíces ..... 148
8-6 Suma y Producto de las Raíces ..... 149
8-7 La Gráfica de una Función Cuadrática ..... 151
8-8 Valores Máximos y Mínimos ..... 153

**9 Sistemas que Envuelven Ecuaciones Cuadráticas** ..... **159**

9-1 La Gráfica de una Ecuación Cuadrática en X y Y .. 159
9-2 Soluciones de un Sistema Cuadrático Mediante Gráficas ..... 163
9-3 Solución por Métodos Algebraicos ..... 164
9-4 Un Sistema sin Término $xy$ ni Términos de Primer Grado ..... 165
9-5 Un Sistema con una Ecuación Lineal y una Cuadrática ..... 166
9-6 Un Sistema sin Términos de Primer Grado ..... 167

**10 Desigualdades** ..... **173**

10-1 Los Axiomas de Primer Orden ..... 173
10-2 Solución de Desigualdades ..... 176
10-3 Desigualdades Absolutas ..... 178
10-4 Sistemas de Desigualdades ..... 180

**11 Progresiones** ..... **185**

11-1 Sucesiones ..... 185
11-2 Progresiones Aritméticas ..... 187
11-3 Progresiones Geométricas ..... 191
11-4 Progresiones Geométricas Infinitas ..... 194
11-5 Progresiones Armónicas ..... 196

**12 Permutaciones, Combinaciones y Probabilidad** ..... **199**

12-1 Principio Fundamental ..... 199
12-2 Permutaciones ..... 202
12-3 Permutaciones de Objetos no Todos Distintos ..... 204
12-4 Combinaciones ..... 207
12-5 Probabilidad en Eventos Simples ..... 210
12-6 Probabilidad en Eventos Múltiples ..... 216
12-7 Probabilidades en Intentos Repetidos ..... 220

**13 El Teorema del Binomio y la Inducción Matemática** ..... **223**

13-1 La Expansión Binomial ..... 223
13-2 La Serie Binomial ..... 228
13-3 Inducción Matemática ..... 229
13-4 Demostración del Teorema Binomial por Inducción Matemática ..... 233

**14 Teoría de las Ecuaciones** ..... **237**

14-1 Polinomios y Ecuaciones Polinomiales ..... 237
14-2 El Teorema del Residuo y el Teorema del Factor .. 237
14-3 División Sintética ..... 240
14-4 Teoremas Concernientes a las Raíces ..... 243
14-5 Coeficientes en Términos de las Raíces ..... 246
14-6 Raíces Racionales ..... 248
14-7 La Gráfica de una Función Polinomial ..... 252
14-8 Un Método para Aproximar Raíces ..... 253
14-9 La Regla de los Signos de Descartes ..... 258

**15 Números Complejos** ..... **261**

15-1 El Campo de los Números Complejos ..... 261
15-2 Representación Gráfica de los Números Complejos 265
15-3 Forma Trigonométrica de un Número Complejo .. 267

15-4 Multiplicación y División de Números en Forma Polar 269
15-5 Potencias y Raíces de Números ..... 272

**16 Matrices Determinantes** ..... **279**

16-1 Matrices y Ecuaciones Lineales ..... 279
16-2 Determinantes de Ordenes Dos y Tres ..... 282
16-3 Determinantes de Orden $n$ ..... 285
16-4 Propiedades de los Determinantes ..... 286
16-5 Desarrollo por Cofactores ..... 291
16-6 Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por Determinantes ..... 296
16-7 Sistemas Lineales que Comprenden más Ecuaciones que Incógnitas ..... 301
16-8 Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneas ... 303
16-9 Algebra de Matrices ..... 305
16-10 La Inversa de una Matriz Cuadrada ..... 307

**17 Logaritmos** ..... **315**

17-1 La Función Logarítmica ..... 315
17-2 Propiedades de los Logaritmos ..... 317
17-3 Logaritmos Comunes ..... 320
17-4 Característica y Mantisa ..... 321
17-5 Tablas de Logaritmos ..... 324
17-6 Interpolación ..... 326
17-7 Logaritmos Usados en los Cálculos ..... 329
17-8 Ecuaciones Exponenciales ..... 331
17-9 Logaritmos de un Número en Diferentes Bases ... 333
17-10 Interés Compuesto ..... 334

**18 Fracciones Parciales** ..... **337**

18-1 Resolución de Fracciones ..... 337
18-2 Factores Lineales Distintos ..... 338
18-3 Factores Lineales Repetidos ..... 340
18-4 Factores Cuadráticos Distintos ..... 341
18-5 Factores Cuadráticos Repetidos ..... 343

**Respuestas a los Problemas Impares** ..... **347**

**Indice** ..... **371**

**Tablas**

Potencias y Raíces ..... 379
Funciones Trigonométricas ..... 380
Logaritmos Comunes ..... 381

Capítulo 1

# CONJUNTOS Y OPERACIONES

## 1-1. CONJUNTOS

La idea de conjunto es un concepto fundamental en matemáticas. Aunque un conjunto se clasifique como un término indefinido, se alcanza cierto entendimiento intuitivo describiendo a un conjunto como una colección especificada de objetos. De este modo, la totalidad de árboles de un parque, la colección de sillas en un cuarto y la lista de familias que viven en un pueblo son ejemplos de conjuntos. Cada objeto de un conjunto es llamado un *elemento* o *miembro* del conjunto. Un conjunto puede especificarse dando una lista de sus elementos o describiéndolo de modo tal que pueda decirse si un objeto es, o no es, un miembro del conjunto.

Surgen muchos tipos de conjuntos en las investigaciones matemáticas. Mencionamos algunos ejemplos de conjuntos y empleamos letras mayúsculas para designar a los conjuntos.

$A$ = el conjunto de todos los ángulos cuya medida está entre 0° y 90°
$B$ = el conjunto de vocales del alfabeto inglés
$C$ = el conjunto de enteros positivos menores que 7*
$D$ = el conjunto de todos los números mayores que 3 y menores que 5
$E$ = el conjunto de condados de Texas
$F$ = los enteros positivos impares menores que 100.

Observamos que los elementos de los conjuntos $B$, $C$, $E$ y $F$ pueden incluirse en una lista. Pero no podemos exhibir en una lista a todos los elementos de los conjuntos $A$ y $D$. Si los elementos de un conjunto pueden enlistarse del primero al último, decimos que

* Suponemos la existencia de los números 1, 2, 3, 4, y así sucesivamente. Este conjunto de números es llamado de los *números naturales*, o de los *enteros positivos*.

el conjuntc es *finito;* de otro modo el conjunto es *infinito.* Es costumbre especificar a un conjunto infinito encerrando una descripción del conjunto entre llaves. Aunque un conjunto finito puede indicarse de esta manera, es a veces más conveniente dar simplemente la lista de los elementos. Podemos especificar los conjuntos anteriores con la notación que sigue:

$A = \{\theta | 0° < \theta < 90°\}$
$B = \{a, e, i, o, u\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$D = \{x | 3 < x < 5\}$
$E = \{x | x \text{ es un condado en Texas}\}$
$F = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 99\}$

La letra $\theta$ en el conjunto $A$ representa a cualquier miembro no especificado del conjunto y los símbolos $<$ y $>$ significan, respectivamente, "es menor que" y "es mayor que". Así, el conjunto consiste en todos los ángulos cuya medida es menor que 90° y mayor que 0°. De manera semejante, $x$ en el conjunto $D$ significa cualquier miembro no especificado del conjunto que consiste en todos los números mayores que 3 y menores que 5. La barra vertical en los conjuntos $A$, $D$ y $E$ puede leerse "tal que", y los tres puntos suspensivos en el conjunto $F$ indican que los demás enteros impares son miembros del conjunto. Con estas explicaciones vemos que los miembros de cada conjunto $A$ hasta $F$ están bien determinados.

Expresamos el hecho de que $\theta$ es un miembro del conjunto $A$, y $x$ es un miembro del conjunto $D$, escribiendo

$$\theta \in A \quad \text{y} \quad x \in D$$

El símbolo $\in$ puede leerse "es un miembro de" o "es un elemento de" o "pertenece a"; el símbolo $\notin$ se lee "no es un miembro de". Las letras $\theta$ y $x$, como se usan aquí, son variables, en el sentido de la siguiente definición.

**Definición 1-1.** Un símbolo, que es usualmente una letra y puede representar a cualquier miembro de un conjunto especificado de objetos, es llamado una *variable.* Si el conjunto tiene tan sólo un miembro, el símbolo es llamado una *constante.*

## 1-2. CONJUNTOS RELACIONADOS

En esta sección señalaremos algunas de las maneras en que pueden relacionarse dos conjuntos.

**Definición 1-2.** Se dice que dos conjuntos $A$ y $B$ *son iguales* $(A = B)$ si cada elemento del conjunto $A$ es un elemento del conjunto $B$ y cada elemento del conjunto $B$ es un elemento del conjunto $A$.

Los conjuntos $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{y, z, x\}$, por ejemplo, son iguales.

**Definición 1-3.** Si es posible formar parejas con los elementos de un conjunto $A$ y un conjunto $B$, de modo que cada elemento del conjunto $A$ quede apareado exactamente con un elemento del conjunto $B$ y cada elemento del conjunto $B$ quede apareado exactamente con un elemento del conjunto $A$, entonces decimos que existe una *correspondencia uno-a-uno* entre los elementos de $A$ y los elementos de $B$.

**Definición 1-4.** Se dice que dos conjuntos $A$ y $B$ son *equivalentes* $(A \leftrightarrow B)$ si puede establecerse una correspondencia uno-a-uno entre sus elementos.

De acuerdo con esta definición, el conjunto infinito de los enteros positivos y el conjunto infinito de los enteros pares positivos son equivalentes. La equivalencia de los conjuntos $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$ se hace evidente al hacer un apareamiento de los elementos por el método siguiente:

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), \ldots$$

**Definición 1-5.** Si cada elemento de un conjunto $A$ es un elemento del conjunto $B$, entonces $A$ es llamado un *subconjunto* de $B$. Si $A$ es un subconjunto de $B$ y si $B$ tiene uno o más elementos que no pertenecen a $A$, entonces $A$ es un subconjunto *propio* de $B$.

Para indicar que $A$ es un subconjunto de $B$, escribimos $A \subseteq B$ lo cual se lee "$A$ está contenido en $B$". Esta notación no nos dice si $A$ es o no es un subconjunto propio. Sin embargo, si $A$ es un subconjunto propio, se puede recalcar este hecho escribiendo $A \subset B$.

Escribimos a continuación algunos de los subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$.

$$\{a\} \subset \{a, b, c, d\}$$
$$\{b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$$
$$\{a, c, d\} \subset \{a, b, c, d\}$$
$$\{a, b, c, d\} \subseteq \{a, b, c, d\}$$

Como lo ilustra el último subconjunto que aparece aquí, un conjunto es un subconjunto de sí mismo; esto es, una consecuencia de la definición de un subconjunto.

Hasta aquí hemos mencionado conjuntos que contienen uno o más elementos. Sin embargo, pueden especificarse condiciones de modo que un conjunto no tenga elemento alguno. Por ejemplo, el conjunto de rubias en un grupo de cinco morenas no tiene elemento alguno. Un conjunto que no contiene elementos es llamado un conjunto *vacío*, o *nulo*. Se usa el símbolo $\varnothing$ para representar al conjunto vacío. Así pues,

$$\{x|x = 1 \text{ y } x = 2\} = \varnothing$$
$$\{x|x \text{ es un entero entre } 5 \text{ y } 6\} = \varnothing$$

Ya que $\varnothing$ no tiene elemento alguno, podemos concluir que cada elemento de $\varnothing$ pertenece a cualquier conjunto $A$ y, por lo tanto, $\varnothing \subseteq A$. En otras palabras, el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto.

## *EJERCICIO 1-1*

Encierre entre llaves (a) una lista de los elementos de cada conjunto y (b) una descripción del conjunto.

1. Los enteros positivos menores que 7.
2. Los enteros pares positivos entre 1 y 13.
3. Los días de la semana.
4. Los meses del año que tienen 30 días.
5. Los tres primeros presidentes de los Estados Unidos.
6. Los trece estados fundadores de los Estados Unidos.
7. Los libros del Pentateuco.

Diga si los dos conjuntos son iguales, equivalentes, o si uno es subconjunto del otro.

8. $A = \{4, 7, 11\}$, $B = \{7, 4, 11\}$.
9. $C = \{a, e, i, o, u\}$, $D = \{u, v, x, y\}$.
10. $C = \{x|x$ es un número entre 1 y 20 y divisible por $4\}$
    $D = \{t|t$ es un entero positivo menor que $20\}$.
11. $S = \{x|x$ es presidente de los Estados Unidos$\}$
    $T = \{x|x$ es un entero positivo menor que $1\}$.
12. Dado $\{5, 7, 8\} = \{x, 8, 7\}$, encontrar $x$.
13. Encuentre un conjunto de valores para $a$, $b$, $c$ de manera que $\{a, b, c\} = \{0, 1, 4\}$.
14. Escriba todos los subconjuntos de (*a*) $\{1\}$, (*b*) $\{u, v\}$.
15. Escriba los ocho subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$.
16. Si $E = \{2, 5, 8, 11\}$ y $F = \{8, 11, 14, 2\}$, diga cuál de las siguientes afirmaciones es válida:

    (a) $8 \in E$, (b) $8 \subset F$, (c) $8 \subset E$, (d) $\varnothing \in F$, (e) $\varnothing \subset F$, (f) $\{8\} \in E$, (g) $\{8\} \subset E$, (h) $E \leftrightarrow F$,

    (i) $\{2, 5, 8\}$ es un subconjunto propio de $E$.
17. Si $A \subset B$ y $B \subset A$, muestre que $A$ es (o no es) igual a $B$.

18. Usando definiciones relativas a conjuntos en la Sec. 1-2, muestre que las siguientes aseveraciones son ciertas para conjuntos $A$, $B$ y $C$:

(a) $A = A$ (la igualdad es reflexiva).
(b) Si $A = B$, entonces $B = A$ (la igualdad es simétrica).
(c) Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$ (la igualdad es transitiva).

## 1-3. OPERACIONES SOBRE LOS CONJUNTOS

Hemos visto que se pueden obtener nuevos conjuntos, llamados subconjuntos, a partir de un conjunto dado. En esta sección vamos a considerar operaciones por medio de las cuales dos conjuntos dan lugar a nuevos conjuntos.

**Definición 1-6.** El conjunto que consiste en la totalidad de los elementos bajo consideración en una discusión particular es llamado el *conjunto universal*. El conjunto universal se denota comúnmente mediante la letra $U$.

**Definición 1-7.** El conjunto de todos los elementos que pertenecen a un conjunto universal de U y que no pertenecen a un subconjunto $A$ dado de $U$ es llamado el *complemento* de $A$.

Denotando al complemento de un conjunto $A$ mediante $A'$, podemos escribir

$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Supongamos, por ejemplo, que tenemos en consideración a los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{c, d, f, g\}$. Podríamos entonces elegir $U = \{a, b, c, d, f, g\}$ y tener

$$A' = \{d,f,g\} \text{ y } B' = \{a,b\}$$

**Definición 1-8.** La *unión* de dos conjuntos $A$ y $B$, denotada por $A \cup B$, se define como el conjunto compuesto por todos los elementos que pertenecen a $A$, o bien, a $B$ o a ambos $A$ y $B$.

De esta definición se infiere que si $x \in A$ entonces $x \in A \cup B$ y si $x \in B$, entonces $x \in A \cup B$. Tenemos, por tanto,

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

**Definición 1-9.** La *intersección* de dos conjuntos $A$ y $B$, denotada por $A \cap B$, se define como el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a $A$ y también pertenecen a $B$.

Expresamos esta definición de manera simbólica escribiendo

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

EJEMPLO 1. Si $A = \{u, v, w, x, y\}$ y $B = \{a, v, w, y\}$, entonces

$$A \cup B = \{u, v, w, x, y, a\}$$

y

$$A \cap B = \{v, w, y\}$$

EJEMPLO 2. Si $C = \{5, 7, 11\}$ y $D = \{\text{Sol, Luna}\}$, entonces

$$C \cup D = \{5, 7, 11, \text{Sol, Luna}\}$$

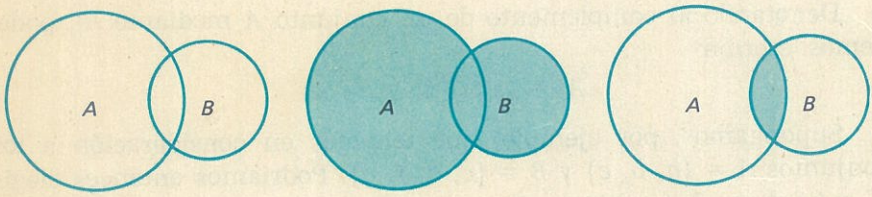
y

$$C \cap D = \varnothing$$

Puesto que $C$ y $D$ no tienen elemento en común, su intersección es el conjunto vacío $\varnothing$.

**Definición 1-10.** Dos conjuntos que no tienen elemento en común son llamados *conjuntos ajenos*.

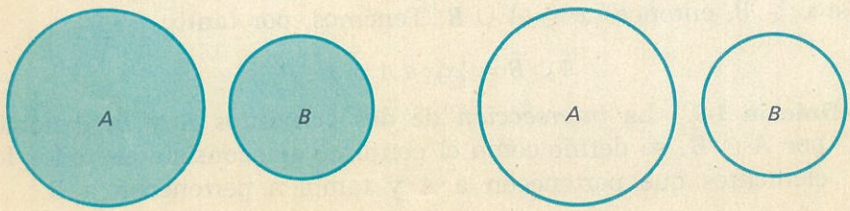
Las Figs. 1-1 y 1-2 son ilustraciones gráficas de la unión y de la intersección de dos conjuntos. En dichas figuras, $A$ representa al conjunto de todos los puntos interiores al mayor de los círculos, y $B$ al conjunto de todos los puntos interiores al menor de los círculos. Las ilustraciones de este tipo son llamadas diagramas de Venn, en honor del lógico inglés John Venn (1834-1883).




$A \cup B$ sombreado $A \cap B$ sombreado

*Figura 1-1*

**Definición 1-11.** Si $x$ y $y$ denotan a dos objetos (iguales o distintos) especificado el primer objeto como $x$ y especificado el segundo objeto como $y$, entonces el símbolo $(x, y)$, es llamado una *pareja ordenada*.




$A \cup B$ sombreado $A \cap B = \varnothing$

*Figura 1-2*

**Definición 1-12.** Si $X$ y $Y$ son conjuntos, el conjunto de todas las parejas ordenadas $(x, y)$ tales que $x \in X$ y $y \in Y$ es llamado el *conjunto producto*, o producto cartesiano, de $X$ y $Y$; o, en símbolos

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ y } y \in Y\}$$

EJEMPLO 3. Si $X = \{a, b\}$ y $Y = \{1, 2, 3\}$, el conjunto producto es

$$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

EJEMPLO 4. Si $S = \{(a, b)\}$, entonces

$$S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

## *EJERCICIO 1-2*

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 3, 4\}$ y $C = \{4, 5, 6, 7\}$, encierre entre llaves a los elementos de los siguientes conjuntos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** $A \cup B$ | **2.** $A \cap B$ | **3.** $A \cup C$ | **4.** $B \cap B$ |
| **5.** $C \cup C$ | **6.** $A \cup \varnothing$ | **7.** $B \cap \varnothing$ | **8.** $A \cup (B \cup C)$ |
| **9.** $A \cup (B \cap C)$ | **10.** $A \cap (B \cap C)$ | **11.** $A \cap (B \cup C)$ | **12.** $A \cup (B \cap \varnothing)$ |

Si $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, s, t, u\}$ y $C = \{t, u, v, w\}$, determine si las siguientes ecuaciones son válidas examinando cada miembro de las ecuaciones.

**13.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
**14.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
**15.** $A \cap (\varnothing \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

* Demuestre que si $A$ y $B$ son conjuntos cualesquiera, entonces cada una de las siguientes ecuaciones es cierta.

| | |
|---|---|
| **16.** $A \cup A = A$ | **17.** $A \cap A = A$ |
| **18.** $A \cap B = B \cap A$ | **19.** $A \cup B = B \cup A$ |

Dibuje diagramas de Venn para ilustrar los siguientes teoremas.

**20.** *Teorema.* Si $A \subset B$, entonces $B \cup A = B$.
**21.** *Teorema.* Si $B \cup A = B$, entonces $A \subset B$.
**22.** *Teorema.* Si $A \cap B = A$, entonces $A \subset B$.
**23.** *Teorema.* Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.

**24.** Si $X = \{1\}$ y $Y = \{2, 3\}$ encuentre $X \times Y$ y $Y \times X$.
**25.** Si $P = \{1, 2\}$ y $Q = \{2, 3\}$, encuentre $P \times Q$ y $Q \times P$.
**26.** Si $S = \{a, b, c\}$ y $T = \{1, 2\}$, encuentre $S \times T$.
**27.** Si $U = \{J, F, M, A, S, O, N\}$, $A = \{J, M, S\}$ y $B = \{O, N\}$, encuentre $A'$ y $B'$. Verificar entonces que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
**28.** Si $U = \{J, F, M, A, S, O, N\}$, $A = \{J, F\}$, y $B = \varnothing$, encuentre $A'$, y $\varnothing'$. Verificar entonces que $(A \cup \varnothing)' = A' \cap \varnothing'$.

Con diagramas de Venn muéstrese que las siguientes ecuaciones son verdaderas si $A$, $B$ y $C$ son subconjuntos de un conjunto universal $U$.

**29.** $A \cup B = B \cup A$
**30.** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
**31.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
**32.** $(A \cap B) \cup (A' \cup B') = U$
**33.** $(A \cup B)' = A' \cap B'$
**34.** $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$
**35.** $(A')' = A$

# Capítulo 2

# LOS NUMEROS REALES

## 2-1. UN SISTEMA DEDUCTIVO

Recordamos que un teorema de geometría plana de escuela secundaria, consiste en una hipótesis y una conclusión, y que la demostración del teorema se realiza mediante un proceso de razonamiento lógico que muestra que la conclusión es una consecuencia de la hipótesis. La hipótesis del teorema descansa sobre teoremas anteriores y, a su vez, cada uno de éstos depende de los teoremas que les preceden. De esta manera, entonces, los teoremas de la geometría plana se extienden hacia atrás hasta un primer teorema que, claramente, no es una consecuencia de otros teoremas establecidos. Por lo tanto, debe haber al menos un teorema cuya demostración descansa sobre una o varias afirmaciones no demostradas. Los enunciados no demostrados son llamados *axiomas* o *postulados* y se supone que son verdaderos.

Hay también numerosas definiciones para los términos empleados en la geometría plana. La primera en la sucesión de definiciones debe describir a un término con palabras cuyo significado se supone conocido. Tales palabras son llamadas *términos indefinidos*. El significado de las palabras "punto" y "línea", por ejemplo, se supone conocido y tales palabras se clasifican como términos indefinidos. Los términos indefinidos y los axiomas constituyen el fundamento de la geometría plana. En la medida en que los teoremas dependen de este fundamento, la geometría plana es llamada un *sistema deductivo* o *axiomático*.

El álgebra, tal como la geometría y muchas otras áreas de las matemáticas, es un sistema deductivo. Este sistema se basa en un conjunto de axiomas y términos indefinidos que introduciremos y estudiaremos en este capítulo. En el tratamiento vamos a considerar un conjunto de elementos indefinidos llamados *números reales* e indicaremos al conjunto con $R = \{a, b, c, \ldots\}$. El conjunto tendrá

dos operaciones básicas, indefinidas, llamadas *adición* y *multiplicación*. El símbolo + denota la operación de adición y los símbolos $\cdot$ o $\times$ denotan a la multiplicación. Así, si $a$ y $b$ representan números reales, escribimos $a + b$ para la adición y $a \cdot b$, $a \times b$, o simplemente $ab$ para indicar multiplicación. El resultado de la adición es llamado la *suma* y el de la multiplicación, el *producto*.

Introduciremos más tarde números que no son números reales. Entre tanto, por brevedad, la palabra *número* significará número real.

El signo de igualdad en el sistema numérico denota a la relación de identidad. De este modo $a = b$ significa que $a$ y $b$ son símbolos para el mismo número. Un enunciado de igualdad, tal como $a = b$, es llamado una *ecuación*.

Para la relación de igualdad suponemos las siguientes propiedades para todos los elementos $a$, $b$, $c$, ... de $R$.

1. $a = a$ (propiedad *reflexiva*)
2. Si $a = b$, entonces $b = a$ (propiedad de *simetría*)
3. Si $a = b$, y $b = c$, entonces $a = c$ (propiedad *transitiva*)
4. Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$ (propiedad *aditiva*)
5. Si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$ (propiedad *multiplicativa*)

Las tres últimas propiedades se describen a veces diciendo, respectivamente: *Cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí; si se suman cantidades iguales a cantidades iguales, los resultados son iguales; si cantidades iguales se multiplican por cantidades iguales, los resultados son iguales.*

Las cinco suposiciones parecen muy razonables. La primera suposición, que dice que un número es igual a sí mismo parece aceptable. Si en la ecuación $a = b$, reemplazamos a $a$ por su igual $b$ y $b$ por su igual $a$, obtenemos $b = a$. Por lo tanto, la segunda suposición es, de hecho, un acuerdo de que cualquier cantidad puede ser reemplazada por una cantidad igual; esto es llamado el *principio de sustitución*. Las suposiciones 3, 4 y 5 se obtienen del mismo modo a partir de este principio. Para verificar la suposición 4, empezamos con la suma $a + c$. Reemplazamos a $a$ por su igual $b$ y $c$ por su igual $d$, tenemos $a + c = b + d$.

Si en las suposiciones 4 y 5 empleamos $c = c$ en vez de $c = d$, vemos que $a + c = b + c$ y $ac = bc$. Estos resultados dan lugar a las reglas familiares:

1. Puede sumarse el mismo número a ambos miembros de una ecuación.
2. Ambos miembros de una misma ecuación pueden ser multiplicados por el mismo número.

## 2-2. AXIOMA DE CAMPO DE LOS NUMEROS REALES

Enunciaremos aquí seis axiomas, llamados los *axiomas de un campo*, para el conjunto de números reales $R$. Posteriormente (Sec. 10-1) se introducirán axiomas adicionales para completar nuestro estudio de los números reales.

**Axioma 1.** *Las leyes de cerradura.* Para cualesquier $a, b \in R$,

$$a + b \in R \quad \text{y} \quad a \cdot b \in R$$

Este axioma simplemente dice que las operaciones de adición o multiplicación de dos números que pertenecen a $R$ dan números que también pertenecen a $R$. De este modo se dice que el conjunto $R$ es *cerrado* bajo estas operaciones. Los números $a + b$ y $a \cdot b$ son llamados, respectivamente, la *suma* y el *producto* de $a$ y $b$.

**Axioma 2.** *Las leyes conmutativas.* Para cualesquier $a, b \in R$,

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

El axioma de conmutatividad nos dice que la suma o el producto de dos números no depende del orden en que se realiza la adición o la multiplicación. Así, $3 + 7 = 7 + 3$ y $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.

**Axioma 3.** *Las leyes asociativas.* Para cualesquier $a, b, c \in R$,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (ab)c = a(bc)$$

El axioma de asociatividad nos dice que la suma o el producto de cualesquier tres números es independiente de la manera en que se agrupan los números para estas operaciones De hecho, los Axiomas 1 a 3 nos permiten sumar o multiplicar cualquier número de números reales en cualquier orden que se elija. Mostraremos dos de las muchas maneras posibles en que se puede encontrar el producto de cuatro números

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = (2 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 5 = (6 \cdot 4) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$$
$$= 2 \cdot (3 \cdot 4) \cdot 5 = 2 \cdot (12 \cdot 5) = 2 \cdot 60 = 120$$

**Axioma 4.** *La ley distributiva.* Para cualesquier $a, b, c \in R$,

$$a(b + c) = ab + ac$$

El axioma de distributividad afirma que un producto puede ser igual a una suma y que, recíprocamente, la suma en cuestión es igual

a un producto, puesto que la igualdad es simétrica. El nombre de este axioma parece apropiado en vista de que el multiplicador *a se distribuye a cada elemento de la suma* $(b + c)$. La ley distributiva, como veremos, tiene consecuencias importantes; es básica en la estructura del álgebra elemental.

Una consecuencia del Axioma 4 es el hecho de que el producto de un número por la suma de tres o más números es igual a la suma de los productos del primer número con cada uno de los números que forman la suma. Así, para el caso de tres números, tenemos

$$\begin{aligned} a[b + c + d] &= a[b + (c + d)] && \text{Axioma 3} \\ &= ab + a(c + d) && \text{Axioma 4} \\ &= ab + (ac + ad) && \text{Axioma 4} \\ &= ab + ac + ad && \text{Axioma 3} \end{aligned}$$

**Axioma 5.** *Los elementos de identidad.* Para cualquier $a \in R$, existe un número real llamado "cero", denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a$$

Para cualquier $a \in R$, existe un número real no nulo llamado "uno" y denotado con 1, tal que

$$a \cdot 1 = a$$

El número 0 es llamado *el elemento de identidad para la adición* y el número 1 es llamado *el elemento de identidad para la multiplicación*. Puesto que 0 y 1 pertenecen a $R$, por el Axioma 2, tenemos

$$a + 0 = 0 + a = a$$

y

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

**Axioma 6.** *Los elementos inversos.* Para cualquier $a \in R$, existe un número real denotado con $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0$$

Para cualquier número no nulo (distinto de 0) $a \in R$, existe un número real denotado por $\frac{1}{a}$, o $1/a$, tal que

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

El número $-a$ es llamado el *inverso aditivo de a*, el *negativo de a*, o *menos a*. El número $1/a$ es llamado el *inverso multiplicativo de a* o el *recíproco de a*.

Por el axioma de conmutatividad, tenemos

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Por tanto, vemos que $a$ es el inverso aditivo de $-a$, y $a \neq 0$ es el inverso multiplicativo de $1/a$. (El símbolo $\neq$ se lee "no es igual a".)

## *EJERCICIO 2-1*

Diga cuál o cuáles axiomas se han usado en cada uno de los enunciados 1 a 13.

**1.** $4 + 5 = 5 + 4$
**2.** $6 + 0 = 6$
**3.** $0 + 5 = 5$
**4.** $(-2) \cdot 1 = -2$
**5.** $3 + (-3) = 0$
**6.** $-3 + [-(-3)] = 0$
**7.** $(-xy) + xy = 0$
**8.** $1 \cdot 7 = 7$
**9.** $-3\left(\frac{1}{-3}\right) = 1$
**10.** $4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$
**11.** $3(5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$
**12.** $x + y = 1 \cdot x + 1 \cdot y$
**13.** $\frac{1}{x + 2y}(x + 2y) = 1$

Encuentre el inverso aditivo y también el inverso multiplicativo de cada uno de los siguientes números.

**14.** $5$
**15.** $1$
**16.** $-2$
**17.** $\frac{2}{3}$
**18.** $-a$
**19.** $(2x + y)$
**20.** $\frac{2x}{5y}$
**21.** $-\frac{3a}{2b}$
**22.** $-\frac{5}{c}$

**23.** Suponiendo que $d \neq 0$, dé el valor de $x$ si (a) $dx = d$, (b) $d + x = d$, (c) $(1/d) \cdot x = 1$.

Muestre que los siguientes enunciados son ciertos.

**24.** $(b + c)a = ab + ac$
**25.** $(ab)c = (ca)b$
**26.** $(b + c + d)a = ab + ac + ad$
**27.** $(a + 3) + b = 3 + (a + b)$
**28.** $-a + (a + b) = b$
**29.** $\frac{1}{a}(ab) = b$

## 2-3. CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS DE CAMPO*

Estableceremos ahora ciertos teoremas que se infieren directamente a partir de los axiomas de campo. Los teoremas representan propiedades básicas del conjunto de números reales y se aplicarán en el trabajo posterior. La mayor parte de los pasos en las demostraciones de los teoremas se justificarán mediante referencia a los axiomas apropiados o a teoremas previamente establecidos. Para abreviar, haremos referencia a los axiomas indicando los números que les fueron asignados en la sección precedente. Ahí donde falten referencias, el estudiante deberá justificarlo. El estudiante puede también establecer los teoremas que se enuncian sin demostración.

**Teorema 2-1.** El elemento de identidad para la multiplicación es único.

*Demostración.* Deseamos mostrar que 1 es el único elemento de identidad para la multiplicación. Supongamos que algún número $b$ es un elemento de identidad para la multiplicación. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot b \\ &= b \cdot 1 && \text{Axioma 2} \\ &= b && \text{Axioma 5} \end{aligned}$$

Vemos así que cualquier elemento de identidad para la multiplicación debe ser igual a 1, y el teorema queda demostrado. ■

**Teorema 2-2.** El elemento de identidad para la adición, 0, es único.

**Teorema 2-3.** El inverso multiplicativo de cualquier número distinto de cero $a \in R$ es único.

*Demostración.* Supongamos que algún número $b$ es multiplicativo inverso de un número real $a$ distinto de cero. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 1 && \text{hipótesis} \\ (a \cdot b)\frac{1}{a} &= 1 \cdot \frac{1}{a} && \text{multiplicando por } \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}(a \cdot b) &= \frac{1}{a} \cdot 1 && \text{Axioma 2} \end{aligned}$$

* La cantidad de material de esta sección que deba cubrirse en clase, variará de un grupo a otro Y ocasionalmente puede ser preferible para los estudiantes continuar suponiendo la verdad de los teoremas.

$$\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)b = \frac{1}{a} \qquad \text{Axiomas 3 y 5}$$

$$1\cdot b = \frac{1}{a} \qquad \text{Axiomas 2 y 6}$$

$$b\cdot 1 = \frac{1}{a} \qquad \text{Axioma 2}$$

$$b = \frac{1}{a} \qquad \text{Axioma 5}$$

De este modo, cualquier inverso multiplicativo de $a$ es igual a $1/a$, y el teorema queda demostrado. ■

**Teorema 2-4.** El inverso aditivo de cualquier número $a \in R$ es único.

**Teorema 2-5.** Para cualquier $a \in R$,

$$-(-a) = a$$

*Demostración*

$$(-a) + [-(-a)] = 0 \qquad \text{Axioma 6}$$

y también

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{Axioma 6}$$

$$(-a) + a = 0 \qquad \text{Axioma 2}$$

Estas ecuaciones revelan que $-(-a)$ y $a$ son ambos inversos aditivos de $-a$. Concluimos, entonces, por el Teorema 2-4, que $-(-a) = a$. ■

**Teorema 2-6.** Para cualquier $a \in R$, $a \cdot 0 = 0$.

*Demostración.*

$$\begin{aligned} a\cdot 0 &= a\cdot 0 + 0 && \text{Axioma 5}\\ &= a\cdot 0 + \{a\cdot 0 + [-(a\cdot 0)]\} && \text{Axioma 6}\\ &= (a\cdot 0 + a\cdot 0) + [-(a\cdot 0)] && \text{Axioma 3}\\ &= a(0+0) + [-(a\cdot 0)] && \text{Axioma 4}\\ &= a\cdot 0 + [-(a\cdot 0)] && \text{Axioma 5}\\ &= 0 \ \blacksquare && \text{Axioma 6} \end{aligned}$$

**Teorema 2-7.** Si $a, b \in R$ y $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$.

*Demostración.* Si $a = 0$, el teorema ciertamente se verifica. Suponemos, por tanto, que $a \neq 0$. Entonces $1/a \in R$ y

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}(0) = 0 \qquad \text{Teorema 2-6}$$

Pero

$$\frac{1}{a}(ab) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) b \qquad \text{Axioma 3}$$

$$= b\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \qquad \text{Axioma 2}$$

$$= b \qquad \text{Axioma 6}$$

Puesto que $b = (1/a)(ab)$ y $(1/a)(ab) = 0$, tenemos $b = 0$ por la propiedad transitiva. ■

**Teorema 2-8.** Si $a, b \in R$, entonces

$$(-a)b = -(ab)$$

*Demostración.*

$$ab + (-a)b = ba + b(-a) \qquad \text{Axioma 2}$$

$$= b[a + (-a)] \qquad \text{Axioma 4}$$

$$= b \cdot 0 \qquad \text{Axioma 6}$$

$$= 0 \qquad \text{Teorema 2-6}$$

Por tanto, $(-a)b$ es el inverso aditivo de $ab$. Puesto que $-(ab)$ es también inverso aditivo de $ab$, tenemos, por el Teorema 2-4,

$$(-a)b = -(ab) \quad ■$$

**Corolarios.** $(-a)b = a(-b)$ y $(-1)b = -b$.

**Teorema 2-9.** Para cualesquier $a, b \in R$,

$$(-a)(-b) = ab$$

Este teorema es una fácil consecuencia de los Teoremas 2-8 y 2-5 y dejamos la demostración al estudiante.

**Definición 2-1.** La operación de sustracción se define en términos de la adición mediante la ecuación

$$a - b = a + (-b)$$

Llamamos a $a - b$ la "diferencia de $a$ y $b$" o "$b$ sustraído de $a$" o $a$ menos $b$". Notamos que en esta definición el símbolo $-$, llamado *signo menos*, se usa de dos maneras diferentes. En la diferencia $a - b$, el signo menos representa la operación de sustracción, y $-b$ en $a + (-b)$ es el negativo de $b$.

**Teorema 2-10.** Si $a, b, c \in R$, entonces

$$a(b - c) = ab - ac$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} a(b - c) &= a[b + (-c)] && \text{Definición 2-1} \\ &= ab + a(-c) && \text{Axioma 4} \\ &= ab + (-c)a && \text{Axioma 2} \\ &= ab + [-(ca)] && \text{Teorema 2-8} \\ &= ab - ca && \text{Definición 2-1} \\ &= ab - ac \ \blacksquare && \text{Axioma 2} \end{aligned}$$

**Definición 2-2.** Para cualesquier $a, b \in R$, $b \neq 0$, la fracción $a/b$ se define mediante la ecuación

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

El símbolo $a/b$ se lee "el cociente de $a$ dividido por $b$"; $a$ es el numerador y $b$ es el denominador de la fracción. Hemos definido la sustracción en términos de la adición y aquí definimos a la división en términos de la multiplicación. Esto es, el cociente de $x$ dividido por $b$ es igual a $a$ multiplicado por el recíproco de $b$ (*inverso multiplicativo de b*).

**Teorema 2-11.** Para cualesquier $b \in R$, $b \neq 0$,

$$\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$$

*Demostración.*

$$-b\left(\frac{1}{-b}\right) = 1 \qquad \text{Axioma 6}$$

y

$$-b\left(-\frac{1}{b}\right) = b\left(\frac{1}{b}\right) = 1 \qquad \text{Teorema 2-9}$$

Ahora se infiere la validez del teorema del hecho de que $-b$ tiene tan sólo un inverso multiplicativo. ■

**Teorema 2-12.** Para cualesquier $a, b \in R, b \neq 0$,

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

*Demostración.*

$$\frac{a}{-b} = a\left(\frac{1}{-b}\right) \qquad \text{Definición 2-2}$$

$$= a\left(-\frac{1}{b}\right) \qquad \text{Teorema 2-11}$$

$$= -\frac{1}{b}(a)$$

$$= -\left(\frac{1}{b} \cdot a\right) \qquad \text{Teorema 2-8}$$

$$= -\frac{a}{b} \qquad \text{Definición 2-2}$$

De manera semejante,

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad ■$$

**Teorema 2-13.** Para cualesquier $a, b \in R, b \neq 0$,

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

*Demostración.*

$$\frac{-a}{-b} = -a\left(\frac{1}{-b}\right) \qquad \text{Definición 2-}$$

$$= -a\left(-\frac{1}{b}\right) \qquad \text{Teorema 2-1}$$

$$= a \cdot \frac{1}{b} \qquad \text{Teorema 2-}$$

$$= \frac{a}{b} \quad ■ \qquad \text{Definición 2-}$$

**Teorema 2-14.** Para cualesquier números no nulos $a, b \in R$,

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

*Demostración.*

$$ab\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) = \left(a \cdot \frac{1}{a}\right)\left(b \cdot \frac{1}{b}\right)$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

Pero

$$ab\left(\frac{1}{ab}\right) = 1$$

Puesto que $ab$ tiene solamente un inverso multiplicativo, concluimos que

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} \quad \blacksquare$$

**Teorema 2-15** Para cualesquier $a, b, c, d \in R$, pero siendo $b$ y $d$ no nulos,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Este teorema, aplicado repetidamente, muestra que el producto de tres o más fracciones es igual al producto de los numeradores dividido por el producto de los denominadores.

**Teorema 2-16.** Para cualesquier $a, b, c \in R$, pero siendo $b$ y $c$ diferentes de cero.

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

*Demostración.*

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} \qquad \text{Teorema 2-15}$$

$$= \frac{a}{b} \quad \blacksquare$$

Este teorema establece que el valor de una fracción no se altera cuando, tanto el numerador como el denominador son divididos, o multiplicados, por el mismo número no nulo.

**Teorema 2-17.** Para cualesquier $a, b, c \in R$, $c \neq 0$,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Este teorema es una consecuencia inmediata de la definición de división y del axioma de distributividad. El teorema puede extenderse para mostrar que la suma de tres o más fracciones con el mismo denominador es igual a la fracción que tiene como numerador a la suma de los numeradores y como denominador al denominador común.

**Teorema 2-18.** Para cualesquier $a, b, c, d \in R$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

*Demostración.*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} \qquad \text{Teorema 2-16}$$

$$= \frac{ad + bc}{bd} \quad \blacksquare \qquad \text{Teorema 2-17}$$

Conviene en algunas ocasiones expresar el cociente de dos fracciones, tal como $a/b$ dividido por $c/d$, mediante la notación

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad \frac{a/b}{c/d}$$

**Teorema 2-19.** Para cualesquier $a, b, c, d \in R$ con $b$, $c$ y $d$ números nulos

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

*Demostración.*

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d}$$

$$= \frac{(a/b)(d/c)}{(c/d)(d/c)} \qquad \text{Teorema 2-16}$$

$$= \frac{(a/b)(d/c)}{1} \qquad \text{Teorema 2-15}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \blacksquare$$

A partir de este teorema, enunciamos la siguiente regla.

*Para dividir una fracción por otra, multiplicamos el dividendo por el divisor invertido.*

**Teorema 2-20.** Si cualesquier $a, b, c \in R$ y si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Para demostrar el teorema, súmese $-c$ a ambos lados de la primera ecuación y aplíquense los axiomas necesarios.

**Teorema 2-21.** Si $a, b, c \in R$, $c \neq 0$, y si $ac = bc$, entonces $a = b$.

Para demostrar este teorema, empiece multiplicando ambos lados de la primera ecuación por $1/c$.

Estos teoremas son llamados algunas veces, respectivamente, la *ley de cancelación en la adición*, y la *ley de cancelación en la multiplicación.*

### *EJERCICIO 2-2*

1. Siendo $a$ un número no nulo, use las ecuaciones $a \cdot 0 = 0$ y $a \cdot 1 = a$ para aclarar por qué $1 \neq 0$.
2. Si $a = -1$ en el axioma de la distributividad, y mostrar que $-(b + c) = -b - c$.
3. Muestre que $-(a - b) = -a + b$ y que $-(a + b - c - d) = -a - b + c + d$.

Demuestre que los siguientes enunciados son correctos. Las letras representan cualesquier números reales con la excepción de que los denominadores han de ser no nulos.

4. $-0 \cdot 0 = 0$.
5. Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$.
6. Si $x + c = a$, entones $x = a - c$.
7. Si $a = b$, entonces $-a = -b$.
8. Si $\dfrac{a}{b} = x$; entonces $a = bx$.
9. Si $x = y$, entonces $x/y = 1$.
10. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.
11. Si $ad = bc$, entonces $a/b = c/d$.
12. Demuestre que el elemento de identidad para la adición es único.
13. Demuestre los Teoremas 2-20 y 2-21.

## 2-4. NUMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Hasta ahora en nuestro estudio de los números reales, no hemos dado atención explícita a ningún subconjunto del conjunto $R$. Discutiremos ahora dos subconjuntos especiales del sistema de números reales. Continuamos aceptando la existencia de los números naturales 1, 2, 3, . . . , que también son llamados números de conteo o enteros positivos. Entonces, por el axioma del inverso aditivo, tenemos los negativos de los números naturales $-1$, $-2$, $-3$, . . . . Los

números naturales, sus negativos y cero, constituyen los enteros del sistema de números reales. El conjunto de los enteros da lugar a un nuevo conjunto de números como se ve en la siguiente definición.

**Definición 2-3.** Cualquier número que pueda ser expresado como el cociente de dos enteros (excluyendo la división por cero) es llamado *número racional.*

Según esta definición, números como $\frac{17}{3}, -\frac{5}{8}, \frac{3}{4}$ son números racionales. Asimismo, cualquier entero, por ser igual a sí mismo dividido por 1, es un número racional. Sin embargo, existen números reales que no son iguales al cociente de dos enteros. Estos números constituyen un importante subconjunto del sistema de números reales y son llamados *números irracionales*. Puede demostrarse, por ejemplo, que los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ y $\pi$ no pueden expresarse como el cociente de dos enteros, y son, por lo tanto, irracionales. Recordamos que los símbolos $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$ representan a los números cuyos cuadrados son 2 y 6. Probaremos que $\sqrt{2}$ es irracional. Sin embargo, es necesario discutir antes algunas ideas preliminares.

Un número real $a$ se dice que es un *entero par* si puede ser expresado como $a = 2n$, donde $n$ es un entero. Así, 8, $-6$, 0 son enteros pares puesto que $8 = 2(4)$, $-6 = 2(-3)$, $0 = 2(0)$. Un número $b$ que es igual a $2n + 1$, donde $n$ es un entero, se llama *entero impar*. A manera de ejemplos, 1, $-7$, 13 son enteros impares porque $1 = 2(0) + 1$, $-7 = 2(-4) + 1$, $13 = 2(6) + 1$.

Ya que cualquier entero $p$ es par o impar, hay algún entero $n$ tal que

$$p = 2n$$

o

$$p = 2n + 1$$

Por tanto

$$p^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$$

o

$$p^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

Por los últimos resultados descubrimos que el cuadrado de un entero par es un entero par, y que el cuadrado de un entero impar es un entero impar. De acuerdo con esto, un entero $p$ es un entero par si $p^2$ también lo es, y es un entero impar si $p^2$ también es impar. Ahora estamos listos para demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 2-22.** El número $\sqrt{2}$ es un número irracional.

*Demostración.* Para establecer el teorema necesitamos demostrar que el número $\sqrt{2}$ no es igual al cociente de dos enteros. Procedemos bajo la suposición de que hay algún número racional $p/q = \sqrt{2}$. Además, suponemos que la fracción $p/q$ está en los términos mínimos, esto es , $p$ y $q$ no tienen factor común distinto del 1 y $-1$. Entonces, elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \text{y} \quad p^2 = 2q^2$$

La última ecuación revela que $p^2$ es divisible por 2 y, en consecuencia, $p = 2n$ para algún entero $n$. Por tanto, sustituyendo, obtenemos

$$4n^2 = 2q^2 \quad \text{y} \quad 2n^2 = q^2$$

La segunda ecuación nos muestra que $q^2$ es divisible por 2, lo cual hace a $q$ un entero par. Así, sobre la base de nuestra suposición de que $\sqrt{2}$ es racional, hemos demostrado que $p$ y $q$ son ambos enteros pares. Esto contradice nuestra suposición de que $p/q$ está en términos mínimos. Por tanto concluimos que el número $\sqrt{2}$ no es racional. ■

De modo análogo podríamos demostrar que números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{10}$, por ejemplo, son números irracionales.

Notamos que el conjunto de números racionales y el de números irracionales son subconjuntos propios del sistema de números reales. Los números racionales contienen al conjunto de enteros como un subconjunto y también contienen al conjunto de racionales no enteros como un subconjunto.

Enunciamos las propiedades siguientes del sistema de números reales.

**Propiedad 1.** La suma, diferencia y producto de cualesquier dos enteros es un entero.

**Propiedad 2.** La suma, diferencia y producto de cualesquier dos números racionales es un número racional. El cociente de cualquier número racional dividido por un número racional no nulo es un número racional.

Aceptamos como postulado la Propiedad 1 sin demostrarla. La Propiedad 2 resulta de los Teoremas 2-14, 2-18 y 2-19 esi las literales representan enteros.

## 2-5. EL EJE NUMERICO REAL

La representación de todos los números reales por puntos sobre una línea, es un concepto básico de las matemáticas. Para establecer esta representación, primero elegimos una dirección como positiva sobre una línea (hacia la derecha en la Fig. 2-1) y de esta línea seleccionamos un punto que representará al número cero, al cual llamamos el *origen*. Después marcamos puntos a distancias 1, 2, 3, . . . unidades hacia la derecha del origen, los cuales representan los números naturales. Del mismo modo marcamos los puntos hacia la izquierda del origen para representar los negativos de los números naturales. Ahora ya tenemos una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de enteros y los puntos así localizados.

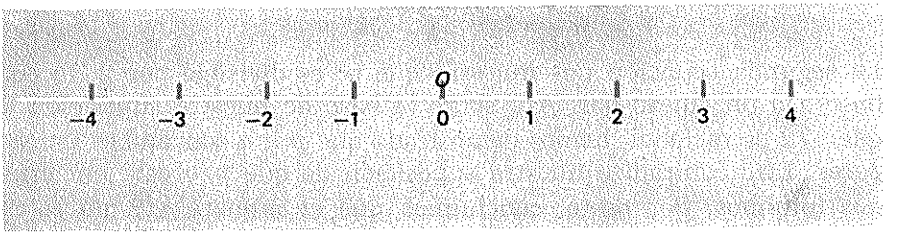



*Figura 2-1*

Números cuyos valores están entre dos enteros consecutivos corresponden a puntos que están entre los puntos asociados a dichos enteros. Así, el número 1/4 corresponde al punto que está a un cuarto de unidad a la derecha del origen. Un segmento rectilíneo de longitud 1/4 de unidad puede construirse usando el método geométrico de dividir un segmento en cuatro partes iguales. Por tanto, todo número racional de la forma $p/4$ tiene como punto correspondiente a aquel que está a una distancia $p$ veces mayor que la distancia de longitud 1/4 —hacia la derecha si $p$ es un número natural y hacia la izquierda si $p$ es el negativo de un número natural—. Los puntos que corresponden a ciertos números irracionales pueden localizarse geométricamente. Las Figs. 2-2 y 2-3 muestran segmentos lineales de longitudes $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, y con esto queda establecido que podemos localizar los puntos que corresponden a los números de la forma $(p/q)\sqrt{2}$ y $(p/q)\sqrt{3}$, donde $p/q$ es un número racional.

Es imposible construir geométricamente un segmento rectilíneo cuya longitud sea igual a un número irracional arbitrario de unidades. Por ejemplo, no podemos localizar geométricamente el punto que está a $\pi$ unidades del origen. Suponemos, sin embargo, que hay

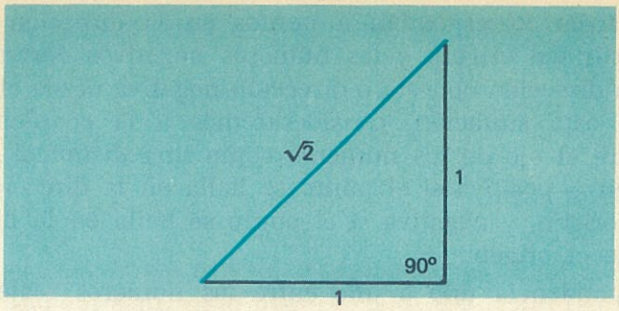



*Figura 2-2*

puntos de la línea que están a $\pi$ unidades a la derecha y a la izquierda del origen y asociamos estos puntos con el número $\pi$ y el negativo de $\pi$. Apoyándonos en la idea de distancia a partir del origen, suponemos que cada número real corresponde a un punto sobre la línea, y, recíprocamente, cada punto en la línea corresponde a un número real.

La línea de la Fig. 2-1, con sus puntos asociados a números reales, es llamada el *eje numérico real* o la *escala numérica real.* El número que corresponde a un punto en la línea es llamado la *coordenada del punto.* Por conveniencia, hablaremos en ocasiones de puntos en vez de números, y viceversa. Por ejemplo, podemos decir que "el punto 5" cuando queremos decir "el número 5", y "el número 5" cuando queremos decir "el punto 5".

Hasta aquí, en este capítulo hemos hablado de números reales y sus negativos, pero no hemos mencionado a los números positivos y a los negativos. Ahora, sin embargo, definifos arbitrariamente a los números correspondientes a puntos en el eje numérico hacia la derecha del origen, como *números positivos* y aquellos que están a la izquierda como *números negativos.* Observamos que los

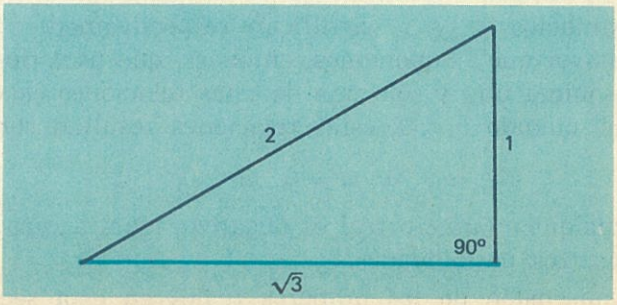



*Figura 2-3*

números positivos corresponden a puntos en la dirección elegida positiva a partir del origen, y los números negativos corresponden a puntos en la dirección opuesta o dirección negativa desde el origen. En virtud de esta situación, consideraremos a la coordenada de un punto sobre el eje de los números como una *distancia dirigida* desde el origen —positiva si el punto se halla en la dirección positiva desde el origen, y negativa si el punto se halla en la dirección negativa desde el origen.

La correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una línea nos proporcionan una representación geométrica de la propiedad de *orden* de los números reales, tema que estudiaremos en el Cap. 10. Considérese un par de números $a$ y $b$ y sus puntos correspondientes en el eje de los números. Los puntos coinciden o no coinciden. Si los puntos coinciden, decimos que los números $a$ y $b$ son iguales. Si el punto $a$ está en la dirección negativa desde $b$ (a la izquierda en la Fig. 2-4), decimos que $a$

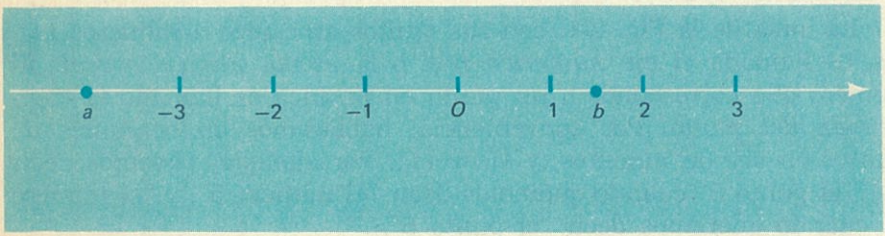



*Figura 2-4*

es menor que $b$. Si el punto $a$ está en la dirección positiva desde $b$, decimos que $a$ es mayor que $b$. Expresamos estas tres posibilidades escribiendo

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

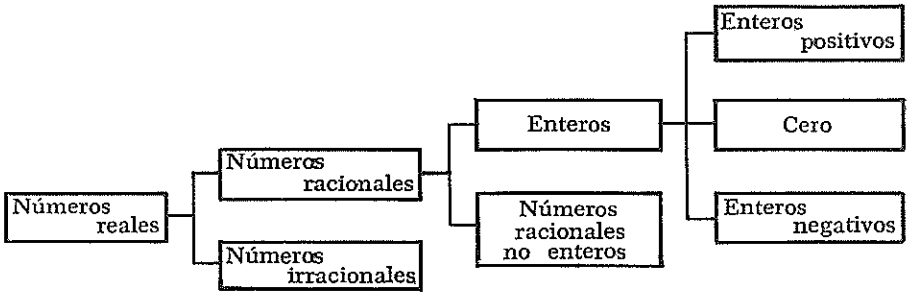
donde los símbolos $<$ y $>$ significan respectivamente "es menor que" y "es mayor que". Suponemos, entonces, que para dos números reales cualesquiera una y sólo una de estas relaciones es verdadera. Notamos que cuando $b = 0$, estas relaciones resultan ser

$$a < 0, \quad a = 0, \quad a > 0$$

Por tanto, cualquier número real es negativo, igual a cero o positivo —una de las tres posibilidades.

Nuestra discusión de los números reales en esta sección y la precedente nos permite hacer las siguientes observaciones: El con-

junto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales son subconjuntos propios del sistema de los números reales. Los números racionales contienen al conjunto de los enteros como subconjunto y al conjunto de racionales no enteros como subconjunto. Y, finalmente, los enteros consisten en enteros positivos, el cero, y los enteros negativos. Esta constitución del sistema de los números reales se ilustra en el diagrama siguiente.




## *EJERCICIO 2-3*

Muestre que cada uno de los siguientes números puede expresarse como el cociente de dos enteros y, es por tanto, racional.

**1.** 0.38 **2.** $5\frac{7}{8}$ **3.** $-11.62$ **4.** 0

Haciendo la división, exprese cada uno de los siguientes números en forma decimal. Obsérvese que de un punto en adelante el decimal consiste en la repetición ilimitada de un grupo de uno o más dígitos. Por lo tanto, al decimal lo llamamos *decimal periódico*. Un decimal periódico, como estudiaremos en el Cap. 11, puede expresarse como el cociente de dos enteros. Concluimos entonces que un número irracional no puede representarse por medio de un decimal periódico.

**5.** $\frac{5}{6}$ **6.** $\frac{14}{9}$ **7.** $\frac{34}{11}$ **8.** $\frac{7}{4}$
**9.** $\frac{21}{37}$ **10.** $\frac{8}{9}$ **11.** $\frac{103}{35}$ **12.** $\frac{329}{333}$

**13.** Paralelamente a la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional, demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional.

Coloque el símbolo apropiado "$<$" o "$>$" entre los números de cada par. También localice en un eje numérico los puntos que correspondan al par de números.

**14.** 4 6 **15.** 3 8 **16.** 7 1
**17.** 5 3 **18.** 6 $-3$ **19.** 3 $-4$
**20.** $-2$ 0 **21.** $-2$ $-4$ **22.** $-5$ $-2$

En el diagrama que está al final de la Sec. 2-5 encuentre el nombre que mejor describe a los siguientes conjuntos de números.

**23.** $1, 4, 8, 9$
**24.** $2, 5, 7, 0$
**25.** $-1, -2, -3, -4$
**26.** $-4, -2, -3, -1$
**27.** $-\frac{2}{3}, 3, \frac{4}{5}, 0$
**28.** $4, \sqrt{2}, -3, 1$
**29.** $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$
**30.** $6, -4, 2, \sqrt{7}$

# Capítulo 3

# OPERACIONES EN LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

## 3-1. ALGUNAS DEFINICIONES

Los axiomas de campo y los teoremas del capítulo precedente nos proporcionan la base para las operaciones que vamos a realizar en este capítulo. Preliminarmente a este estudio, introducimos algunas ideas y definiciones.

La adición, la sustracción, la multiplicación y la división son llamadas las *operaciones fundamentales del álgebra*. Cada uno de dos o más números que se multiplican entre sí para obtener un producto es llamado un *factor* del producto. En el producto $7xy$, por ejemplo, 7, $x$ y $y$ son los factores, siendo $x$ y $y$ *factores literales*. Es costumbre llamar a un factor numérico, tal como el 7, el *coeficiente* de los factores literales. Pero, más generalmente, cualquier factor o factores pueden ser vistos como el coeficiente de los demás factores. Así, en $7xy$, $7x$ es el coeficiente de $y$ y $x$ es el coeficiente de $7y$.

Uno o más números combinados con algunas o todas las operaciones fundamentales del álgebra constituyen una *expresión algebraica*. Una expresión algebraica puede presentarse separada en partes por uno o varios signos "más" y "menos" Cada una de estas partes con el signo que le precede es llamada un *término*. Se omite con frecuencia el signo del primer término de una expresión algebraica; en tales casos se subentiende que el signo es más.

EJEMPLOS

$3a$ es una expresión de un término.
$2x - 3y$ es una expresión con los términos $+2x$ y $-3y$.
$mn - pq + 7$ es una expresión con los términos $mn$, $-pq$ y $+7$.

Una expresión de un término es llamada un *monomio;* una expresión de dos términos un *binomio;* y una expresión de tres términos un *trinomio.* La palabra *multinomio* se usa para indicar una expresión de dos o más términos.

Los términos de una expresión algebraica con el mismo factor literal o factores son llamados *términos semejantes.* La expresión $3xy - 3y - 2xy + 4x$, por ejemplo, tiene $3xy$ y $-2xy$ como términos semejantes.

El concepto de valor absoluto de un número real es de particular significación. Con respecto a este concepto, damos la siguiente definición.

**Definición 3-1.** El valor absoluto de un número real $a$, denotado por $|a|$, es el número real tal que

$|a| = a$ cuando $a$ es positivo o cero.
$|a| = -a$ cuando $a$ es negativo.

De acuerdo con esta definición, el valor absoluto de un número no nulo es positivo y el valor absoluto de cero es cero. Así,

$$|4| = 4, \qquad |-4| = -(-4) = 4, \qquad |0| = 0$$

## 3-2. ADICION Y SUSTRACCION

En la aritmética, los números positivos se suman, pero en el álgebra la adición puede realizarse entre números tanto positivos como negativos. La adición en este sistema más amplio de números es llamada a veces *adición algebraica.*

EJEMPLO 1.

$$11 + 4 = 15$$
$$-11 - 4 = -(11 + 4) = -15$$
$$11 - 4 = 7$$
$$-11 + 4 = -(11 - 4) = -7$$

Estos resultados se obtienen gráficamente en la Fig. 3-1. Observamos, por ejemplo, que el punto correspondiente a 15 está 4 unidades a la derecha del punto correspondiente a 11. Todos los puntos localizados de esta manera por dos números positivos están a la derecha del origen, y esto nos motiva *suponer* que la suma de dos números positivos es positiva. Estos resultados de las cuatro adiciones son ilustraciones de los siguientes enunciados.

1. La suma de dos números de signos semejantes (ambos positivos o negativos) es igual a la suma de sus valores absolutos precedida por el signo común.
2. La suma de dos números de signos no semejantes se obtiene sustrayendo el valor absoluto más pequeño del mayor valor absoluto y tomando el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

EJEMPLO 2. Encontremos la suma de $3ab$ y $-7ab$.

*Solución.* Para encontrar la suma de estos términos semejantes, escribimos

$$3ab - 7ab = (3 - 7)ab \qquad \text{ley distributiva}$$
$$= -4ab$$

Observamos que el coeficiente de la suma es la suma algebraica de los coeficientes de los términos separados. Este método de sumar puede extenderse a tres o más términos.

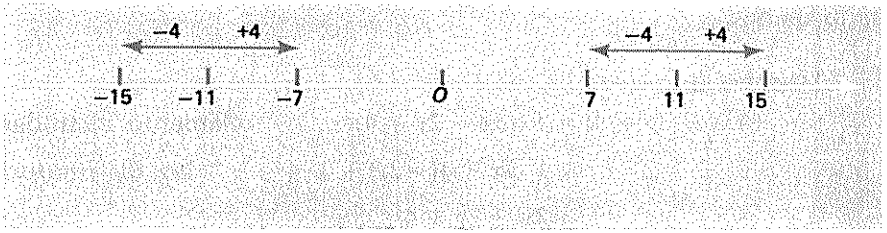



*Figura 3-1*

EJEMPLO 3. Combinemos términos semejantes en la expresión

$$11a + 6ac - 4 - 7a + 5ac + 6 - a$$

*Solución.* Agrupando los términos semejantes de la expresión, tenemos

$$(11a - 7a - a) + (6ac + 5ac) + (-4 + 6) \qquad \text{axioma asociativo}$$
$$= (11 - 7 - 1)a + (6 + 5)ac + 2 \qquad \text{axioma distributivo}$$
$$= 3a + 11ac + 2$$

EJEMPLO 4. Encontremos la diferencia si $-5x + 4y + 5z$ se sustrae de $2x + 6y - 3z$.

*Solución.* Podemos obtener la diferencia encontrando la suma de la segunda expresión anterior (el minuendo) y el inverso aditivo de la primera expresión (el sustraendo). Obtenemos el inverso aditivo del sustraendo cambiando el signo de cada uno de sus términos. Así, tenemos.

$$\begin{array}{r} 2x + 6y - 3z \\ 5x - 4y - 5z \\ \hline 7x + 2y - 8z \end{array}$$

De otra manera, podemos cambiar los signos de los términos del sustraendo mentalmente y escribimos

$$\begin{array}{rl} 2x + 6y - 3z & \text{MINUENDO} \\ -5x + 4y + 5z & \text{SUSTRAENDO} \\ \hline 7x + 2y - 8z & \text{DIFERENCIA} \end{array}$$

Al realizar las operaciones algebraicas, es a veces necesario colocar paréntesis (u otros símbolos de agrupación) alrededor de una expresión o remover paréntesis de una expresión. Ilustramos el procedimiento para introducir y para quitar paréntesis cuando un signo más precede a los paréntesis y también cuando los precede un signo menos.

EJEMPLO 5.

$$\begin{aligned} +(3x - 2y + 4) &= 1 \cdot (3x - 2y + 4) && \text{elemento identidad} \\ &= 1 \cdot 3x + 1(-2y) + 1 \cdot 4 && \text{ley distributiva} \\ &= 3x - 2y + 4 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.

$$\begin{aligned} -(3x - 2y + 4) &= -(3x - 2y + 4) \cdot 1 && \text{elemento identidad} \\ &= -1 \cdot (3x - 2y + 4) && (-a)b = (-b)a \\ &= -3x + 2y - 4 && \text{ley distributiva} \end{aligned}$$

Como lo muestran estas ilustraciones, los paréntesis precedidos por un signo más, pueden colocarse alrededor, o ser removidos de una expresión si no se cambian los signos de los términos de la expresión. Si lo que precede a un paréntesis es un signo menos, los signos de todos los términos deben cambiarse al retirar los paréntesis.

Ocurre con frecuencia que uno o más juegos de símbolos de agrupación están contenidos uno en otro. Para remover tales símbolos es aconsejable empezar con los símbolos internos.

EJEMPLO 7.

$$\begin{aligned}
&\{6x - [3x - (x - y) - 4y] + y\} \\
&= \{6x - [3x - x + y - 4y] + y\} \\
&= \{6x - [2x - 3y] + y\} \\
&= \{6x - 2x + 3y + y\} \\
&= 4x + 4y
\end{aligned}$$

## *EJERCICIO 3-1*

Realice las operaciones indicadas.

**1.** $(-14) + 6$ **2.** $9 + (-3)$ **3.** $(-17) + (-5)$
**4.** $|-7| + |3| + |-5|$ **5.** $6 - 9| + |10 - 4|$ **6.** $|5| + |-5|$
**7.** $18 + (-17) + (10)$ **8.** $(-7) + (-9) + (-13)$ **9.** $mn + (-mn) + 6mn$
**10.** $(-3y) + (-7y + (-6y)$ **11.** $6 - (-6)$ **12.** $(-20) - 13$
**13.** $(-x) - (-7x)$ **14.** $13 - (-17) - 10$ **15.** $(-7) - 1 - (-6)$
**16.** $(-8a) - (-3a) - (-2a)$ **17.** $5a - 6a - 7a$
**18.** $|4 - 8| - |-6|$ **19.** $|14 - 11| - |-8|$

Encuentre la suma de las dos expresiones en cada uno de los Probs. 20 a 24. Sustraiga después la segunda expresión de la primera.

**20.**
$$\begin{array}{r} 2x + 10y - 16 \\ 7x - 8y + 10 \end{array}$$

**21.**
$$\begin{array}{r} 5a + 9b - 10c \\ -6a \quad + \quad 7c \end{array}$$

**22.**
$$\begin{array}{r} 7x + 7y \\ 3x - 9y + 6z \end{array}$$

**23.**
$$\begin{array}{r} 3x + 6xy + 3yz + 4 \\ 3x - 7xy - 6yz - 13 \end{array}$$

**24.**
$$\begin{array}{r} 4mn - 3m - 5n + 6 \\ 8mn + 7m - 2n - 8 \end{array}$$

Sume las tres expresiones en cada uno de los Probs. 25 a 27. Sustraiga luego la tercera expresión de la suma de las dos primeras.

**25.** $7a - 3b + 11c; -14a + 10b + 10c; 8a + 8b + 13c$
**26.** $3xy + 4yz - x; 2x - 4xy + 7yz; 3yz - x + 5xy$
**27.** $2r - 3rs + 7s; -4s - 3r + 5rs; 2rs + 3s - 8r$

Quite los símbolos de agrupación y simplifique combinando términos semejantes.

**28.** $2a - (b + c) + (a - b - c)$ **29.** $4x + (y - 3) - (3x + 1)$
**30.** $(3x - 2y) - (x + 4y - z)$ **31.** $(x - y) - (2x - 3y) - (-x + y)$
**32.** $a - (b - c + 4) + (a + c - 2)$ **33.** $1 - [a - 2b - (3 - a) + 3]$
**34.** $8a - [(a + 3b) - (3a - 3b)]$ **35.** $-[x + (3 - x) - (4 + 3x)]$
**36.** $-\{5a - b - [3b - (c - b + 2a) - 4a] + c\}$
**37.** $3xy - \{-(2xy + 4x) + [3y - (-xy + x + 2xy)]\}$
**38.** $-\{a - 2ab + b - [3a + 5ab + 6b - (a - b) + 5]\}$

Coloque paréntesis precedidos por un signo menos alrededor de los últimos tres términos de cada expresión. Coloque entonces paréntesis precedidos por un signo positivo alrededor de los tres últimos términos de cada expresión.

**39.** $2 - 5x - 6y + 7z$ **40.** $a + 2b - 3c - 5$ **41.** $c - xy + 3 - yz$
**42.** $1 + 3 - p + q$ **43.** $-x - 4y - 3z$ **44.** $r - s + 2t - st$

## 3-3. MULTIPLICACION

Al multiplicar dos números precedidos por algún signo, es preciso conocer el signo del producto. Para responder a esta pregunta, *suponemos* primero que el producto de dos números positivos es positivo. Entonces, de acuerdo con los Teoremas 2-8 y 2-9, tenemos

$$-a(b) = -(ab)$$
$$(-a)(-b) = ab$$

Estas ecuaciones, siendo ciertas para cualesquier números reales $a$ y $b$, son ciertamente válidas cuando $a$ y $b$ son números positivos. Si $a$ y $b$ son positivos, $-a$ y $-b$ son negativos. Entonces, la primera ecuación dice que el producto de un número negativo y un número positivo es negativo, y la segunda ecuación dice que el producto de dos números negativos es positivo. Ahí tenemos una justificación para las siguientes reglas.

*El producto de dos números de signos iguales es positivo. El producto de dos números de signos diferentes es negativo.*

EJEMPLO 1.

$$(-2)(-3)(4) = (6)(4) = 24$$
$$(-2)(3)(4) = (-6)(4) = -24$$
$$(-2)(-3)(-4) = (6)(-4) = -24$$

Hay productos en que el mismo factor ocurre dos, tres o más veces. Un producto de ese tipo puede expresarse escribiendo el factor un número apropiado de veces, pero es más conveniente usar una notación abreviada. Así

$$a \cdot a = a^2 \qquad \text{(léase "}a\text{ cuadrada")}$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3 \qquad \text{(léase "}a\text{ cúbica")}$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 \qquad \text{(léase "}a\text{ cuarta")}$$

Estas son ilustraciones de la siguiente definición.

**Definición 3-2.** Si $a$ es un número y $n$ es un entero positivo, entonces $a^n$ denota el producto de $n$ factores, cada uno de los cuales es $a$. Estos es,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \qquad (n \text{ factores})$$

La cantidad $a^n$ es llamada la $n$-ésima *potencia de a*, y a veces se lee "$a$ a la enésima". El número $a$ es la *base* y $n$ el *exponente*. La primera potencia de un número se expresa usualmente sin exponente. Así, por definición, $a^1 = a$.

**Teorema 3-1.** Si $a$ es un número real y $m$ y $n$ son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

*Demostración.* La cantidad $a^m$ significa el producto de $m$ factores, cada uno de los cuales es $a$ y $a^n$ significa $a$ tomado como factor $n$ veces. En total, $a$ ocurre como factor $m + n$ veces, lo cual exhibimos escribiendo

$$a^m a^n = \overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a)}^{m \text{ factores}} \overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a)}^{n \text{ factores}} = a^{m+n} \quad \blacksquare$$

Como ilustración de esta ley de exponentes, tenemos

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$$

$$a^2 a^5 a^7 = a^{2+5+7} = a^{14}$$

$$(2a^3b^2)(3ab^4) = 2 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot a^1 \cdot b^2 \cdot b^4 = 6a^4b^6$$

EJEMPLO 2. Multipliquemos $x^2 - 3xy - 2y^2$ por $2y^3$.

*Solución.* Usando la ley distributiva para la multiplicación y el Teorema 3-1, obtenemos

$$\begin{aligned} 2y^3(x^2 - 3xy - 2y^2) &= 2y^3(x^2) + 2y^3(-3xy) + 2y^3(-2y^2) \\ &= 2x^2y^3 - 6xy^4 - 4y^5 \end{aligned}$$

El paso intermedio se escribe para enfatizar el proceso. El procedimiento usual es escribir tan sólo el resultado final.

El siguiente teorema puede establecerse por aplicaciones repetidas del axioma distributivo.

**Teorema 3-2.** El producto de dos multinomios es la suma de todos los resultados obtenidos al multiplicar todos los términos de un multinomio por cada término del otro.

EJEMPLO 3. Multipliquemos $2x^2 + xy - 3y^2$ por $x^2 - 3xy + y^2$.

*Solución.* Obtenemos el producto multiplicando la primera expresión en turno, por $x^2$, $-3xy$, y $y^2$ y sumando los resultados separados. Por conveniencia, al sumar los productos separados, arreglamos el trabajo de modo que términos semejantes aparezcan en la misma columna.

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 + xy - 3y^2 & \\
x^2 - 3xy + y^2 & \\
\hline
2x^4 + x^3y - 3x^2y^2 & \text{multiplicar por } x^2 \\
-6x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3 & \text{multiplicar por } -3xy \\
+2x^2y^2 + xy^3 - 3y^4 & \text{multiplicar por } y^2 \\
\hline
2x^4 - 5x^3y - 4x^2y^2 + 10xy^3 - 3y^4 & \text{sumar}
\end{array}
$$

### *EJERCICIO 3-2*

**Multiplique como se indica y reúna términos semejantes.**

1. $(4)(-5)(-2)$
2. $(3)(-1)(6)$
3. $(-4)(-5)(-3)$
4. $(5xy)(2xy)$
5. $(-6a^2b)(3ab^2)$
6. $(-2a^2)(-3a)$
7. $(xy)(-2y)(3x)$
8. $(-xy)(2y)(-5x)$
9. $(3x^2y^2)(2xy)(x^2y)$
10. $2x^2y(3xy^2 + x)$
11. $xy(x^3 - y^3)$
12. $-7a^2(4a - 3)$
13. $(x + 2y)(x - 2y)$
14. $(2m - 3n)(m + n)$
15. $(1 - 2x)(4 + 3x)$
16. $(4m - 5)(3m + 6)$
17. $(3x + 5y)(3x - 5y)$
18. $(s^2 - t^2)(s - t)$
19. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
20. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
21. $(c + 4a)(2c^2 + 5ac - a^2)$
22. $(3a - 2c)(a^2 - 7ac + 8c^2)$
23. $(x^2 - 7)(3x^2 - 5x - 6)$
24. $(b^2 + 3)(2b^2 + 3b - 4)$
25. $(a + b - 1)(a + b + 1)$
26. $(2x - y + 4)(2x + y + 4)$
27. $(a^2 - 3a + 4)(a^2 + 2a - 3)$
28. $(c^2 - 3c + 2)(c^2 - c + 4)$
29. $(3x^2 - x - 6)(2x^2 + x + 4)$
30. $(m^2 - 4m + 3)(2m^2 + m - 4)$
31. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
32. $(a + 2)(a - 1)(a + 3)$
33. $(2 - m)(3 - 2m)(1 + m)$
34. $(4 - x)(4 + 2x)(4 - x)$

## 3-4. DIVISION

En esta sección consideraremos la operación de dividir una expresión algebraica por otra. Descubriremos primeramente, sin embargo, una regla para determinar el signo del cociente de dos números con signo. Supongamos que $c$ es el cociente de un número $a$ dividido por un número no nulo $b$. Entonces

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{y} \quad a = bc$$

La última ecuación nos dice que el cociente $c$ es positivo si $a$ y $b$ son ambos positivos o ambos negativos, y que $c$ es negativo si $a$ y $b$ tienen signos opuestos. De acuerdo con lo anterior, tenemos la siguiente regla.

**Regla.** *El cociente de dos números de signos iguales es positivo. El cociente de dos números de signos desiguales es negativo.*

Al definir la división (Definición 2-2), eliminamos al cero como divisor. La razón para este rechazo del cero se hace evidente cuando tratamos de usar cero como un divisor. Para dividir un número $a$ (diferente de cero) por cero, debemos encontrar un número $c$ tal que $a = 0 \cdot c$. Esto es posible, por supuesto, ya que el producto de cero y cualquier otro número es igual a cero. La ecuación se vería satisfecha, sin embargo, si el dividendo $a$ fuese también cero. Pero en este caso, el cociente $c$ podría ser cualquier número, ya que $0 = 0 \cdot c$. Por tanto, la división por cero nunca es permitida.

Preparando el camino para la división de un multinomio por un monomio, necesitamos establecer otra ley de exponentes.

**Teorema 3-3.** Si $m$ y $n$ son enteros positivos y $a \neq 0 \in R$, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{si} \quad m > n$$

$$= 1 \quad \text{si} \quad m = n$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{si} \quad m < n$$

*Demostración.* Si $m > n$, tenemos por el Teorema 3-1

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^{m-n}}{a^n}$$

$$= \frac{a^n}{a^n}(a^{m-n})$$

$$= a^{m-n}$$

Si $m = n$, tenemos por la definición de división (Definición 2-2)

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^m\left(\frac{1}{a^m}\right) = 1 \quad \blacksquare$$

Dejamos la demostración de la última parte del teorema al estudiante.

Como una ilustración del teorema, escribimos

$$\frac{y^5}{y^2} = y^{5-2} = y^3 \quad \text{y} \quad \frac{15x^2}{-3x^4} = -\frac{5}{x^2}$$

EJEMPLO 1. Dividamos $3x^2y - 6xy^2 + 12x$ por $3x$.

*Solución.* El Teorema 2-17 nos permite dividir cada término de un multinomio por un monomio. Por tanto,

$$\frac{3x^2y - 6xy^2 + 12x}{3x} = \frac{3x^2y}{3x} - \frac{6xy^2}{3x} + \frac{12x}{3x}$$

$$= xy - 2y^2 + 4$$

Consideramos ahora el problema de la división cuando el dividendo y el divisor son multinomios. Nos limitaremos, sin embargo, a multinomios de un tipo especial llamados polinomios.

Una expresión algebraica en que cada término que comprende a $x$ es de la forma $kx^n$, con $n$ un entero positivo y $k$ libre de $x$, es llamado un *polinomio en* $x$. El polinomio puede tener uno o varios términos que no involucren a $x$. De acuerdo con esta definición

$$3x + 4, \quad \tfrac{5}{4}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - x - 1, \quad 3x^4 - 5x^2 + 7x$$

son polinomios en $x$.

El *grado* de cada término de un polinomio en $x$ es el exponente de $x$ en tal término, y el grado del polinomio se define como el mayor exponente alcanzado por $x$ en el polinomio. Por ejemplo, los términos de

$$7x^4 + 6x^3 - x^2 - 5x + 3$$

son, respectivamente, de grados cuatro, tres, dos, uno y cero. Obsérvese que al término constituido por 3 le consideramos de grado cero.

Podemos tener polinomios en una, dos, tres o más letras. El grado de un término con respecto a un conjunto de letras, es la suma de los exponentes de tales letras en el término. Y la mayor de las sumas así obtenidas entre los términos del polinomio, determina el grado del polinomio con respecto a dicho conjunto de letras. La expresión

$$2x^3y^2z - 3x^2y + xy - z + 5$$

es un polinomio de grado tres en $x$, de grado dos en $y$, de grado uno en $z$, de grado cinco en $x$ y $y$, de grado cuatro en $x$ y $z$, de grado tres en $y$ y $z$ y de grado seis en $x$, $y$ y $z$.

Ahora describimos un método para dividir un polinomio entre otro. El procedimiento es muy semejante al de la división en la aritmética.

1. Arréglense el dividendo y el divisor en el orden de las potencias descendentes de una letra común, dejando un hueco para cualquier potencia faltante de la letras en el dividendo.
2. Divida el primer término del dividendo por el primer término del divisor. Esto da el primer término del cociente.
3. Multiplique el divisor por el primer término del cociente y sustraiga el resultado del dividendo.
4. Considere el residuo así obtenido como un nuevo dividendo y repita los pasos 2 y 3 para encontrar el segundo término del cociente y el siguiente residuo.
5. Continúe este proceso hasta que se obtenga un residuo que es cero o es de menor grado en la letra común que el grado del divisor.

Si el residuo es cero, la división es exacta y el resultado puede expresarse como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$$

Si el residuo no es cero, expresamos el resultado como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

EJEMPLO 2. Dividamos $3x - 6x^2 + 18$ por $2x + 3$.

*Solución.* Escribimos el dividendo y el divisor en el orden de las potencias descendentes de $x$ y llevamos a cabo los pasos enlistados con anterioridad.

$$\begin{array}{rl} & -3x + 6 \qquad \text{COCIENTE} \\ \text{DIVISOR} \quad 2x+3 & \overline{)-6x^2+3x+18} \quad \text{DIVIDENDO} \\ & \underline{-6x^2-9x} \\ & \quad 12x+18 \\ & \quad \underline{12x+18} \\ & \quad\quad 0 \quad \text{RESIDUO} \end{array}$$

Por tanto, tenemos

$$\frac{-6x^2+3x+18}{2x+3} = -3x+6$$

EJEMPLO 3. Dividamos $6a^4 - 41a^2 + 3a + 6$ por $2a^2 - 4a - 3$.

*Solución.* Llevamos a cabo los pasos enlistados anteriormente empleando una disposición que facilita las operaciones.

$$
\begin{array}{lrl}
 & 3a^2 + 6a - 4 & \text{COCIENTE} \\
\text{DIVISOR } 2a^2 - 4a - 3 \overline{)} & 6a^4 - 41a^2 + 3a + 6 & \text{DIVIDENDO} \\
 & \underline{6a^4 - 12a^3 - 9a^2} & \\
 & 12a^3 - 32a^2 + 3a & \\
 & \underline{12a^3 - 24a^2 - 18a} & \\
 & -8a^2 + 21a + 6 & \\
 & \underline{-8a^2 + 16a + 12} & \\
 & 5a - 6 & \text{RESIDUO}
\end{array}
$$

Por tanto,

$$\frac{6a^4 - 41a^2 + 3a + 6}{2a^2 - 4a - 3} = 3a^2 + 6a - 4 + \frac{5a - 6}{2a^2 - 4a - 3}$$

La corrección en un problema de división puede verificarse usando la relación

$$\text{dividendo} = (\text{cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo}$$

## *EJERCICIO 3-3*

**Realice las divisiones indicadas.**

**1.** $\dfrac{4x^4}{2x^2}$ **2.** $\dfrac{-36x^2y^3}{-6x^2y}$ **3.** $\dfrac{8ab}{-4ab}$

**4.** $\dfrac{14x^2 - 21x^3}{7x^2}$ **5.** $\dfrac{15a^2b^3 - 9ab}{3ab}$ **6.** $\dfrac{9x^2 - 6x + 3}{-3}$

**7.** $\dfrac{m^2n - mn^2 - mn}{mn}$ **8.** $\dfrac{m^4n^3 + 2m^2n^4 - m^2n^2}{m^2n^2}$

**9.** $\dfrac{5x^2y^3 - 10x^4y^4}{5x^2y^3}$ **10.** $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$ **11.** $\dfrac{3x^2 + x - 24}{x + 3}$

**12.** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 32}{x - 4}$ **13.** $\dfrac{8 - 6x + x^3}{x + 2}$ **14.** $\dfrac{12x^2 - 7x - 10}{3x - 4}$

**15.** $\dfrac{2x^3 - 20x - 5}{2x + 6}$ **16.** $\dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$ **17.** $\dfrac{a^3 + b^3}{a + b}$

**18.** $\dfrac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2}$ **19.** $\dfrac{x^3 + 10x^2 + 12x + 27}{x^2 + x + 3}$

**20.** $\dfrac{4 - 7x + 10x^2 + 12x^3}{2x^2 + x + 1}$ **21.** $\dfrac{2x^4 - 5x^3 + 11x - 2x^2 - 6}{x^2 - 3x + 2}$

**22.** $\dfrac{4x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x + 3}{1 + x + 2x^2}$ **23.** $(x^4 + x^2y^2 + y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$

24. $(2m^4 - 3m^3n + 3m^2n^2 + mn^3 - n^4) \div (2m - n)$
25. $(2m^4 + 5m^3n - 2m^2n^2 + 10mn^3 - 3n^4) \div (m^2 + 3mn - n^2)$
26. $(x^5 - 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 8x + 7) \div (x - 2)$
27. $(6 + 10x + 3x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \div (x^2 + x + 2)$
28. $(2x^5 + 5x^2 + 1 - 5x^4 - 4x^3 - 5x) \div (2x - 1)$
29. $(2x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 11x + 4) \div (2x^2 - 3x + 1)$
30. $(6x^5 + x^4 + 10x^3 + 4x + 3) \div (2x^2 + x + 3)$

## 3-5. PRODUCTOS ESPECIALES

En muchos problemas aparecen una y otra vez para ser multiplicados ciertos factores que son expresiones algebraicas de un determinado tipo. Por tanto, es conveniente aprender a escribir los productos rápidamente. Vamos a dar una lista de fórmulas para multiplicar, que condensan en gran manera el procedimiento usado en la Sec. 3-3. Cada fórmula puede ser verificada llevando a cabo la multiplicación indicada en el lado izquierdo. El estudiante debería memorizar las fórmulas y aplicarlas hasta adquirir dominio en la obtención de productos formados con factores de estos tipos, y, recíprocamente, debiera aprender a obtener los factores cuando se le dan los productos. Es importante comprender que las letras en las fórmulas representan cualquier cantidad.

Producto de la suma y diferencia de dos números

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \tag{1}$$

Cuadrado de un binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{2}$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \tag{3}$$

Producto de dos binomios con términos semejantes

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 \tag{4}$$

El cubo de un binomio

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \tag{5}$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \tag{6}$$

Con la excepción de la fórmula (4), el estudiante puede beneficiarse expresando las fórmulas verbalmente. Sugerimos las siguientes expresiones verbales para las fórmulas (1) y (3).

El producto de la suma y diferencia de dos números es igual al cuadrado del primer número, menos el cuadrado del segundo.

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero menos el doble del producto de los números más el cuadrado del segundo.

EJEMPLO 1. Realicemos la multiplicación $(3a + 4b)(3a - 4b)$.

*Solución.* Aplicamos la fórmula (1) con $x = 3a$ y $y = 4b$. Así,

$$(3a + 4b)(3a - 4b) = (3a)^2 - (4b)^2 = 9a^2 - 16b^2$$

EJEMPLO 2. Encontremos el producto $(x - 2y + z)(x - 2y - z)$.

*Solución.* Agrupando términos y aplicando las fórmulas (1) y (3), tenemos

$$[(x - 2y) + z][(x - 2y) - z] = (x - 2y)^2 - z^2$$
$$= x^2 - 4xy + 4y^2 - z^2$$

EJEMPLO 3. Escribamos por inspección el producto de $3x - 4y$ y $2x + 5y$.

*Solución.* Escribimos los binomios y describimos un procedimiento. El producto del primer término de los binomios es $(3x)(2x) = 6x^2$, y de los segundos términos $(-4y)(5y) = -20y^2$.

$$\overset{-8xy}{\overbrace{\phantom{(3x - 4y)(2x + 5y)}}}$$
$$\underset{15xy}{\underbrace{(3x - 4y)(2x + 5y)}} \qquad -8xy + 15xy = 7xy$$

Como se indica en el diagrama, el producto de los dos términos internos es $(-4y)(2x) = -8xy$ y el producto de los dos términos externos es $(3x)(5x) = 15xy$, lo cual da $7xy$ para la suma de estos términos semejantes. Por tanto, tenemos

$$(3x - 4y)(2x + 5y) = 6x^2 + 7xy - 20y^2$$

El término intermedio de este producto es llamado el *producto cruzado*. Siendo la suma de dos términos, es el menos sencillo de encontrar. Sin embargo, la idea es determinar cuáles términos del producto son de este tipo y escribir el resultado inmediatamente.

EJEMPLO 4. Encontremos el cubo de $2m - 5n$.

*Solución.* Podemos usar la fórmula (6) con $x = 2m$ y $y = 5n$ o, alternativamente, la fórmula (5) con $x = 2m$ y $y = -5n$. Eligiendo esta última fórmula, tenemos

$$(2m - 5n)^3 = (2m)^3 + 3(2m)^2(-5n) + 3(2m)(-5n)^2 + (-5n)^3$$
$$= 8m^3 - 60m^2n + 150mn^2 - 125n^3$$

## *EJERCICIO 3-4*

Escriba los productos por inspección

1. $(m + 4)(m - 4)$
2. $(3 + 4x)(3 - 4x)$
3. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
4. $(ab + cd)(ab - cd)$
5. $(3a^2 - 11b^2)(3a^2 + 11b^2)$
6. $(6 - 3b^2)(6 + 3b^2)$
7. $(r + 4s)^2$
8. $(x - 3)^2$
9. $(2x - 3y)^2$
10. $(mn^2 + 4)^2$
11. $(-4x^2 - 3y^2)^2$
12. $(a^3 - b^3)^2$
13. $[(x - 11) + y]^2$
14. $(2 - m - 2n)^2$
15. $(x + 5)(x + 3)$
16. $(2x - 1)(x - 1)$
17. $(3m + 2)(2m + 1)$
18. $(2a + 3b)(5a + b)$
19. $(7a + b)(a - 6b)$
20. $(3x^2 - 2)(4x^2 + 2)$
21. $(2r^2 - 3s^2)(3r^2 + 2s^2)$
22. $(2r^2 - 3s^2)(3r^2 + s^2)$
23. $(mn - 2y)(mn + y)$
24. $(2xy + z^2)(3xy - 2z^2)$
25. $(x - 1)^3$
26. $(x + 3)^3$
27. $(2x + 3y)^3$
28. $(5 - x)^3$
29. $(-a - b)^3$
30. $(x^3 + y^3)^3$

Considerando los factores de cada problema como suma y diferencia de dos cantidades, escribir entonces el producto.

31. $(a + b + 1)(a + b - 1)$
32. $(x - y + 3)(x - y - 3)$
33. $(1 - 3m + n)(1 - 3m - n)$
34. $(a + b + 1)(a - b - 1)$
35. $(x + 5y + 1)(x - 5y + 1)$
36. $(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$

## EJERCICIO DE REVISION

En cada uno de los siguientes problemas sustituya los valores dados por las variables. Simplifique entonces el resultado realizando las operaciones indicadas (Secs. 3-1 y 3-2).

1. $|x| - y + |z - 2|; x = -2, y = 3, z = 1$
2. $x - |y| - |z - 1|; x = -2, y = -3, z = 4$
3. $|x - y| + |2y| - |3z|; x = 3, y = -4, z = 3$
4. $|-5x| + |y - z| + |3z|; x = 4, y = 0, z = 2$
5. $|3x - 1| - (3y + 6) - |x - 2y|; x = 0, y = -4, z = 6$
6. $|3 - 2x| + |2 - 3y| - 2(y + z); x = -3, y = -2, z = 4$
7. $2x - 3 - 3x - 2y| + |4 - 5z|; x = 1, y = 2, z = -2$
8. $|3x - z| - |2x - z| - |y - z|; x = -1, y = 3, z = -1$

Realice las multiplicaciones indicadas (Sec. 3-3)

9. $(3a^2b^3)(2ab)$
10. $(-3a^2b)(4ab^3)$
11. $(7ab^4)(-2a^2b^2)$
12. $(2ab^2)(-5a^3b^3)$
13. $(6a^2b)(ab^2)(-2ab^3)$
14. $(4a^3b)(-3ab^3)(-5a^2b^2)$
15. $(3a^3b)(2a^2b^2)(-ab)$
16. $(ab^4)(a^4b)(4a^3b^3)$
17. $2b^2(a^2 + 3ab - 2a^2b^3)$
18. $-3a^2b(3a + 4ab^2 - b^2)$
19. $-5a^2(a^3 - 3ab^2 - 3a^2b^2)$
20. $-ab^4(2a^2 - 4ab - b^3)$
21. $(a + b)(2a - b)$
22. $(3a + b)(2a - 3b)$
23. $(3a - 2b)(4a + 3b)$
24. $(a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2)$

25. $(b + 2a)(b^2 - ab + a^2)$
26. $(a^2 - 7)(3a^2 - 5a - 6)$
27. $(a^2 + 3a + 2)(a^2 - a - 4)$
28. $(2a^2 - a + 7)(3a^2 + a - 4)$

Realice las divisiones indicadas (Sec. 3-4).

29. $\dfrac{6x^4}{2x^2}$
30. $\dfrac{-25x^3y^2}{-5xy}$
31. $\dfrac{14x^4y^3}{-7x^3y}$
32. $\dfrac{21x^2 - 14x^3}{7x^2}$
33. $\dfrac{9x^2y^3 - 6xy}{3xy}$
34. $\dfrac{4xy - x^2y^2}{xy}$
35. $\dfrac{x^2 - 8x + 7}{x - 1}$
36. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$
37. $\dfrac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$
38. $\dfrac{12x^2 - x - 19}{3x - 4}$
39. $\dfrac{8x^2 + 10x - 5}{4x - 1}$
40. $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 96}{x + 4}$
41. $\dfrac{2x^3 - 9x - 30}{x - 3}$
42. $\dfrac{2x^3 - 6x^2 + 7}{2x - 4}$
43. $\dfrac{x^3 - 10x^2 + 12x + 27}{x^2 - x + 3}$
44. $\dfrac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2}$
45. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 8x - 3}{x^2 - 2x + 4}$
46. $\dfrac{4x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 3}{x^2 + x - 1}$
47. $\dfrac{4x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 3x + 1}{2x - 3}$

Escriba los productos por inspección (Sec. 3-5).

48. $(5 + x)(5 - x)$
49. $(3x^2 + 4)(3x^2 - 4)$
50. $(x + yz)(x - yz)$
51. $(4 - x)^2$
52. $(2x - 3)^2$
53. $(x^2 + 2y^2)^2$
54. $(xy^2 - 3)^2$
55. $(2x - 3y + 2)^2$
56. $(x^2 + x - 1)^2$
57. $(x - 6)(x + 5)$
58. $(2x + 1)(x - 5)$
59. $(2x + 7y)(3x - 4y)$
60. $(3x^2 + 2)(2x^2 - 1)$
61. $(2x + 7y)(7x - 4y)$
62. $(x + 2)^3$
63. $(x - 3)^3$
64. $(x^3 - y^3)^3$
65. $(xy - 3z)^3$

Trate los dos factores de cada problema como la suma y diferencia de dos cantidades y entonces encuentre el producto (Sec. 3-5).

66. $(x - y + 1)(x - y - 1)$
67. $(x + y - 3)(x + y + 3)$
68. $(1 - 2x + y)(1 - 2x - y)$
69. $(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$
70. $(x - y + 1)(x + y - 1)$
71. $(x + 5y - 1)(x - 5y + 1)$

Capítulo 4

# FACTORIZACION Y OPERACIONES CON LAS FRACCIONES

## 4-1. TIPOS SIMPLES DE FACTORIZACION

Una parte considerable del Cap. 3 trató con el problema de encontrar los productos de factores. En este capítulo consideraremos el problema de encontrar los factores, dado el producto. Este proceso, llamado *factorización*, se usa ampliamente en las operaciones algebraicas. La factorización en esta etapa se reduce usualmente a polinomios y factores cuyos términos tienen coeficientes racionales. Decimos que un polinomio está completamente factorizado cuando ninguno de sus factores puede ser factorizado. Cada factor, entonces, siendo expresable como 1 veces sí mismo o menos 1 veces su negativo, es llamado *primo*.

En esta sección consideramos polinomios cuyos factores son fácilmente determinables.

**Tipo 1.** *Factores comunes.* Si cada término de un polinomio tiene un factor común, la ley distributiva nos permite expresar al polinomio como el producto de dos factores, uno de los cuales es el factor común.

EJEMPLO 1. $4x^3y^2 + 2x^2y^3 - 6x^2y^2 = 2x^2y^2(2x + y - 3)$

EJEMPLO 2. $x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

**Tipo 2.** *La diferencia de dos cuadrados.* Leyendo la fórmula del producto especial $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ de derecha a izquierda, obtenemos la fórmula de factorización

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

EJEMPLO 1. $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$

EJEMPLO 2. $4ax^2 - 16ay^2 = 4a(x^2 - 4y^2) = 4a(x + 2y)(x - 2y)$

Nota: Como se ilustra aquí, el primer paso en cualquier factorización debe ser el retiro del factor común, cuando lo haya.

EJEMPLO 3. $(a + b)^2 - (c - 2d)^2 = (a + b + c - 2d)(a + b - c + 2d)$

**Tipo 3.** *Trinomio cuadrado perfecto.* De las fórmulas para el cuadrado de un binomio (Sec. 3-5), tenemos las fórmulas de factorización

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

EJEMPLO 1.

$$25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2(5x)(3) + (3)^2$$
$$= (5x + 3)^2$$

EJEMPLO 2.

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2$$
$$= (3x - 2y)^2$$

**Tipo 4.** *La suma y la diferencia de dos cubos.* Multiplicando, podemos verificar las fórmulas

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

que nos permitirán factorizar la suma y la diferencia de dos cubos.

EJEMPLO 1.

$$27x^3 + 64y^3 = (3x)^3 + (4y)^3$$
$$= (3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$$

EJEMPLO 2.

$$2x^4y - 54xy^4 = 2xy(x^3 - 27y^3)$$
$$= 2xy(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$$

## *EJERCICIO 4-1*

Factorice completamente cada expresión.

1. $x^3 - x^2y + 2xy^3$
2. $10x^2y + 6xy^3 - 2x^3y$
3. $3x^2 - 3xy + 6xy^2$
4. $3(a + 3) + x(a + 3)$

5. $m(a + 2b) - n(a + 2b)$
6. $2x(1 - y) + 3a(1 - y)$
7. $9x^2 - y^2$
8. $x^2 - 25$
9. $1 - 49y^2$
10. $4a^2 - 9b^2c^2$
11. $2ax^2 - 50ay^2$
12. $m^3 - 16m$
13. $(a - 1)^2 - b^2$
14. $(a - b)^2 - 9c^2$
15. $4x^2y^2 - (z - 1)^2$
16. $x^2 + 4x + 4$
17. $x^2 - 6x + 9$
18. $4x^2 + 12x + 9$
19. $16a^2 + 8ab + b^2$
20. $4a^2x^2 - 4ax + 1$
21. $3ax^2 + 6ax + 3a$
22. $8x^3 + y^3$
23. $a^3 - 64b^3$
24. $1 - 8b^3$
25. $27p^3q^3 + 8$
26. $a^4 + 8ab^3$
27. $2xy^4 - 2x^4y$
28. $8(x + 1)^3 + y^3$
29. $(x + 2y)^3 - 8y^3$
30. $54x^5y - 2x^2y^4$
31. $x^4 - 16$
32. $81 - y^4$
33. $a^4 - 625b^4$
34. $a^6 - b^6$
35. $64x^6 - y^6$
36. $x^6 + 64y^6$
37. $3a^7b^2 - 3a^3b^2$
38. $2a^5b^2 - 162ab^2$
39. $(2m - 1)^2 - (n - 1)^2$
40. $2a^3b^3 + 12a^3b^2 + 18a^3b$
41. $4a^4b^2 - 12a^3b^3 + 9a^2b^4$
42. $(2a - b)^2 - (a + 3b)^2$
43. $\frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{4}$
44. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

## 4-2. TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Consideramos ahora el caso de trinomios factorizables que no son cuadrados perfectos. Invirtiendo el orden de la escritura de los miembros de la fórmula para el producto de dos binomios con términos semejantes (Sec. 3-5), tenemos

$$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

Para factorizar un trinomio de este tipo, necesitamos encontrar valores racionales para $a$, $b$, $c$ y $d$ a partir de los valores conocidos $ac$, $ad + bc$ y $bd$. Si tales valores racionales existen, decimos que el trinomio es factorizable. La factorización para este caso es menos fácil que la factorización de trinomios cuadrados perfectos. Los siguientes ejemplos, sin embargo, muestran un procedimiento.

EJEMPLO 1. Factoricemos el polinomio $x^2 - 5x + 6$.

*Solución.* Si se usa $x$ como primer término de cada factor, el producto contendrá a $x^2$. El producto de los otros términos debe ser 6. Este valor es el producto de 1 y 6, de $-1$ y $-6$, de 2 y 3, y de $-2$ y $-3$. Observando el término intermedio del trinomio dado, vemos que los números cuyo producto es 6 deben tener suma $-5$. Tan sólo la pareja $-2$ y $-3$ tiene esta suma. Por tanto,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

EJEMPLO 2. Factoricemos la expresión $8x^2 - 2xy - 15y^2$.

*Solución.* Para los primeros términos de los factores, la pareja $x$ y $8x$ y la pareja $2x$ y $4x$ son las únicas posibilidades con coeficientes positivos. Entonces, los segundos términos deben tener $-15y^2$ como su producto. Las elecciones para este producto son $y$ y $-15y$, $-y$ y $15y$, $3y$ y $-5y$, y $-3y$ y $5y$. Pero la suma de los productos cruzados (el primer término de cada factor veces el segundo término del otro) debe dar $-2xy$, Probando las varias combinaciones puede determinarse que $2x - 3y$ y $4x + 5y$ son los factores. Por tanto,

$$8x^2 - 2xy - 15y^2 = (2x - 3y)(4x + 5y)$$

### *EJERCICIO 4-2*

Factorice cada expresión completamente.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $m^2 + 6m + 8$ | **2.** $m^2 - 9m + 18$ | **3.** $m^2 - 9m + 20$ |
| **4.** $m^2 + 5m - 14$ | **5.** $m^2 - 4mn - 21n^2$ | **6.** $m^2 - 5mn - 36n^2$ |
| **7.** $m^2 + 11mn + 18n^2$ | **8.** $2x^2 + x - 3$ | **9.** $3x^2 + 4x - 4$ |
| **10.** $4x^2 + 23x - 6$ | **11.** $10x^2 - 13x - 3$ | **12.** $4x^2 - 4x - 15$ |
| **13.** $21 - 25x - 4x^2$ | **14.** $3x^2y^2 - 11xy + 8$ | **15.** $6x^2 - 11xy - 7y^2$ |
| **16.** $4x^2y^2 - 5xy^3 - 6y^4$ | **17.** $a^4 - 7a^2 + 12$ | **18.** $6a^4 - 5a^2 - 6$ |
| **19.** $2a^4 - a^2 - 1$ | **20.** $4a^4 - 17a^2 + 4$ | **21.** $3a^4 - 10a^2 - 8$ |
| **22.** $4a^4 - 37a^2 + 9$ | **23.** $9a^4 - 13a^2 + 4$ | |
| **24.** $(m + n)^2 - (m + n) - 2$ | **25.** $3(x - y)^2 - 7(x - y) + 2$ | |
| **26.** $4x^4y - 2x^3y^2 - 20x^2y^3$ | **27.** $12x^3y - 27x^2y^2 + 6xy^3$ | |
| **28.** $x^6 - 7x^3 - 8$ | **29.** $8x^6 - 7x^3 - 1$ | |

## 4-3. FACTORIZACION POR AGRUPAMIENTO

Hay veces en que un polinomio cuyos términos no contienen ningún factor común pueden ser separados en grupos de términos con factor común. Y algunos polinomios que no están en la forma de diferencia de dos cuadrados pueden ser expresados así mediante un agrupamiento adecuado de los términos.

EJEMPLO 1.

$$\begin{aligned} 3x + 3y + ax + ay &= (3x + 3y) + (ax + ay) \\ &= 3(x + y) + a(x + y) \\ &= (x + y)(3 + a) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2x + 2y &= (x^2 - y^2) + (-2x + 2y) \\ &= (x + y)(x - y) - 2(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 2) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.

$$\begin{aligned} 4 - x^2 + 2xy - y^2 &= 4 - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= 4 - (x - y)^2 \\ &= (2 + x - y)(2 - x + y) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Factoricemos $x^4 - 13x^2 + 4$.

*Solución.* El trinomio dado sería un cuadrado perfecto si el término intermedio fuese $-4x^2$. Obtenemos el cuadrado perfecto sumando $9x^2$. Si sumamos $9x^2$, debemos sustraer $9x^2$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 4 &= (x^4 - 4x^2 + 4) - 9x^2 \\ &= (x^2 - 2)^2 - (3x)^2 \\ &= (x^2 - 2 + 3x)(x^2 - 2 - 3x) \end{aligned}$$

El artificio de sumar y sustraer un término, en un problema de este tipo, funciona solamente si (a) la expresión por ser factorizada se vuelve un cuadrado perfecto mediante adición y sustracción, de un término, (b) el término adicionado, y también sustraído, es un cuadrado perfecto.

## *EJERCICIO 4-3*

Factoricemos cada expresión completamente.

1. $ax + ay + 4x + 4y$
2. $4x + 12 + xy + 3y$
3. $ax - ay + 2cx - 2cy$
4. $12xy + 9cy + 3cx + 4x^2$
5. $3xy + 9ax - ay - 3a^2$
6. $m^3 - 2m^2 - 3m + 6$
7. $4 - 2m - 4m^2 + 2m^3$
8. $am^3 - 3m^2 - am + 3$
9. $x^2 + 2x + 1 + ax + a$
10. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 6y$
11. $x^2 - y^2 + 5x + 5y$
12. $x^2 - 4y^2 - 3x + 6y$
13. $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
14. $x^2 - y^2 - 8x + 16$
15. $m^2 - 9 + 12n - 4n^2$
16. $25 - m^2 - 2mn - n^2$
17. $x^2 - 2x + 1 - y^2 - 2yz - z^2$
18. $x^2 + 4x + 4 - y^2 + 2yz - z^2$
19. $x^2 - 8x - y^2 + 4y + 12$
20. $x^3 + y^3 + x + y$
21. $a^3 + b^3 - a^2 - 2ab - b^2$
22. $x^4 + 4$
23. $64a^4 + 1$
24. $x^4 - 3x^2 + 1$
25. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
26. $36x^4 + 11x^2 + 1$
27. $4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$

## 4-4. FRACCIONES ALGEBRAICAS

En el Cap. 2 definimos una fracción y demostramos algunos teoremas que proveen la base para operar con las fracciones. La fracción, como allí se definió, involucra números literales. Fracciones de este tipo son a veces llamadas *fracciones algebraicas* para distinguirlas de las fracciones de la aritmética.

Podemos pensar que con una fracción están asociados tres signos —el signo que precede a la fracción, el signo del numerador y el signo del denominador—. Acordando que cuando alguno de estos signos esté ausente se subentiende que se trata del signo más, tenemos a partir de los Teoremas 2-12 y 2-13

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}, \qquad b \neq 0$$

Estas ecuaciones nos dicen que el valor de una fracción no se altera (a) cuando el signo del numerador y el signo del denominador son cambiados simultáneamente, (b) cuando el signo de la fracción se altera al tiempo que se altera el signo del numerador o del denominador. En otras palabras, *pueden cambiarse cualesquier dos de los asociados con una fracción sin alterar el valor de ésta.*

Llamamos la atención hacia el Teorema 2-16 que se expresa simbólicamente por

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \qquad b \cdot c \neq 0$$

Leyendo de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, vemos que el numerador y el denominador de una fracción pueden ser simultáneamente multiplicados o divididos por un número no nulo sin alterar el valor de la fracción.

Si el numerador y denominador de una fracción están en forma factorizada, los signos de los términos de cualesquier dos de los factores, o los signos de los términos de uno de los factores y el signo de la fracción, pueden ser cambiados sin alterar el valor de la fracción. Dejamos la demostración de esta afirmación al estudiante.

Tratando con fracciones algebraicas, acordaremos que el número o los números literales del denominador no deben tomar valores que anulen al denominador.

## 4-5. REDUCCION A TERMINOS MINIMOS

Se dice que una fracción está en *términos mínimos* o en su *forma más simple* si el numerador y el denominador no tienen factor común exceptuando $\pm 1$. Así podemos determinar si una fracción

está en sus términos mínimos expresando el numerador y denominador como productos de sus factores primos. Cualquier factor que aparezca tanto en el numerador como en el denominador, puede entonces ser removido por división.

EJEMPLO 1. Reduzcamos la fracción $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$ a términos mínimos.

*Solución.*

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

El factor común es removido dividiendo tanto el numerador como el denominador entre $x - 2$.

EJEMPLO 2. Reduzcamos la fracción $\dfrac{x^2 - 9x + 20}{25 - x^2}$ a términos mínimos.

*Solución.*

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 9x + 20}{25 - x^2} &= \frac{(x - 5)(x - 4)}{(5 - x)(5 + x)} \\ &= \frac{(5 - x)(4 - x)}{(5 - x)(5 + x)} \\ &= \frac{4 - x}{5 + x}\end{aligned}$$

Observe usted que hemos obtenido un factor común en el numerador y denominador invirtiendo los signos de los términos en los dos factores del numerador.

El proceso de eliminar un factor común del numerador y denominador de una fracción es llamado *cancelación multiplicativa*. Esta operación es, a veces, mal interpretada cancelando cantidades iguales que no son factores. La fracción

$$\frac{(2x + y) + 5}{(2x + y)(2x - y)}$$

por ejemplo, tiene $2x + y$ como un *factor* del denominador, pero $2x + y$ es un *término* del numerador, no un factor. Tachar cantidades iguales aquí significaría que el denominador es dividido entre $2x + y$ y que $2x + y$ es sustraído del numerador. Este es un grave error y debe evitarse. La fracción, tal como se dio, está ya en términos mínimos.

## *EJERCICIO 4-4*

Reduzca cada fracción a términos mínimos.

**1.** $\dfrac{25xy^2}{75x^2y}$ **2.** $\dfrac{24ab^2c}{18a^2bc^2}$ **3.** $\dfrac{3^2a^6b}{18a^4b^6}$

**4.** $\dfrac{2x}{x^2+2x}$ **5.** $\dfrac{ax+3x}{a^2+3a}$ **6.** $\dfrac{3x+2}{9x^2-4}$

**7.** $\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}$ **8.** $\dfrac{a^2-ab}{ab-b^2}$ **9.** $\dfrac{x-1}{x-x^2}$

**10.** $\dfrac{6x-6y}{3x-3y}$ **11.** $\dfrac{b^2-a^2}{(a-b)^2}$ **12.** $\dfrac{3x^2+15xy}{2x^2+10xy}$

**13.** $\dfrac{6abc-18ab}{3a^2bc-9a^2b}$ **14.** $\dfrac{5x^3y-5x^2y^2}{x^2y^2-xy^3}$ **15.** $\dfrac{a^2-b^2}{2a^2+ab-b^2}$

**16.** $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2+x-2}$ **17.** $\dfrac{4x^2+7x-2}{1-16x^2}$ **18.** $\dfrac{3+2x-x^2}{3+5x+2x^2}$

**19.** $\dfrac{9-6x+x^2}{9-9x+2x^2}$ **20.** $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$ **21.** $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^3-b^3}$

**22.** $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+x^2y+xy^2}$ **23.** $\dfrac{x^2-y^2+x+y}{x^2-y^2}$ **24.** $\dfrac{4a^2-b^2}{4a^2-b^2+2a-b}$

**25.** $\dfrac{y^3-y^2+y-1}{y^3+y^2+y+1}$ **26.** $\dfrac{a^3-2a^2-a+2}{a^3+2a^2-a-2}$ **27.** $\dfrac{c^3+3c^2+2c+6}{c^3-c^2+2c-2}$

## 4-6. MULTIPLICACION Y DIVISION DE FRACCIONES

Los teoremas 2-15 y 2-19 proporcionan procedimientos para multiplicar y dividir fracciones. Estos teoremas se expresan por las ecuaciones

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad b, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \qquad b, c, d \neq 0$$

Estos teoremas nos permiten dar los siguientes enunciados.

1. El producto de dos o más fracciones es igual al producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores.
2. El cociente de dos fracciones es igual al dividendo multiplicado por el divisor invertido.

Es, con frecuencia, deseable reducir el producto, o el cociente, de fracciones a términos mínimos. Siendo este el caso, el mejor procedimiento es escribir cada fracción en la forma factorizada. Factores comunes del numerador y del denominador pueden entonces ser fácilmente removidos por división.

EJEMPLO 1. Multipliquemos $\dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$ por $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - x - 2}$.

*Solución.* Factorizando los numeradores y denominadores de las fracciones, tenemos

$$\frac{(2x - 3)(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{(x - 1)(x - 1)}{(x - 1)(3x + 2)} = \frac{2x - 3}{3x + 2}$$

EJEMPLO 2. Encontremos el producto de

$$(x^2 - y^2) \cdot \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{2x^2 - 3xy + y^2} \cdot \frac{2x - y}{x^2 + 2xy + y^2}$$

*Solución.* Escribimos $x^2 - y^2$ en forma fraccional y factorizamos todos los numeradores y denominadores. Así, obtenemos

$$\frac{(x + y)(x - y)}{1} \cdot \frac{(x + 2y)(x + y)}{(2x - y)(x - y)} \cdot \frac{2x - y}{(x + y)^2} = x + 2y$$

EJEMPLO 3. Dividamos $\dfrac{a^3 - 1}{a^2 - 9}$ por $\dfrac{a^2 + a + 1}{a^2 - 2a - 3}$.

*Solución.* Para encontrar el cociente, invertimos el divisor y entonces multiplicamos. Así obtenemos

$$\frac{a^3 - 1}{a^2 - 9} \cdot \frac{a^2 - 2a - 3}{a^2 + a + 1} = \frac{(a - 1)(a^2 + a + 1)}{(a + 3)(a - 3)} \cdot \frac{(a + 1)(a - 3)}{a^2 + a + 1}$$

$$= \frac{(a - 1)(a + 1)}{a + 3}$$

EJEMPLO 4. Realicemos las operaciones indicadas:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 8} \cdot \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 10x + 21} \div \frac{x + 5}{x - 7}$$

*Solución.* Invirtiendo el divisor y factorizando, obtenemos

$$\frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 2)(x - 4)} \cdot \frac{(x + 5)(x - 2)}{(x - 7)(x - 3)} \cdot \frac{x - 7}{x + 5} = 1$$

## *EJERCICIO 4-5*

Realice las operaciones indicadas y exprese cada resultado en términos mínimos.

1. $\frac{28y}{15x} \cdot \frac{5x}{7y}$
2. $\frac{4x^2}{3a^2b} \cdot \frac{9a^3b}{2x}$
3. $8ab^2 \cdot \frac{3}{4ab}$
4. $\frac{64x^2}{39y} \cdot \frac{13y^2}{48x^2}$
5. $\frac{17x^2}{27ab} \cdot \frac{9ab^2}{34x}$
6. $\frac{5a^4x^3}{8b^2y} \cdot \frac{4by}{a^3x^4}$
7. $\frac{7bc}{9a} \div \frac{14c}{a^2}$
8. $\frac{10xy^3}{3z^3} \div \frac{5x^2y}{6z^3}$
9. $64x^3 \div \frac{8x^2y^3}{3}$
10. $\frac{x^2 + x}{y^2 - 1} \cdot \frac{y + 1}{x + 1}$
11. $\frac{a + b}{x - 2y} \cdot \frac{2y - x}{2b + 2a}$
12. $\frac{1 - a}{1 - x^3} \cdot \frac{1 - x^2}{a^2 - 1}$
13. $\frac{x - y}{a - b} \div \frac{y - x}{2a - 2b}$
14. $\frac{2x - 12}{3x} \div (x - 6)$
15. $\frac{x^2 - y^2}{x + 2y} \div \frac{x + y}{2x + 4y}$
16. $\frac{a^3 + b^3}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x + y}{a + b}$
17. $\frac{4 - x^2}{8 - x^3} \cdot \frac{2 - x}{2 + x}$
18. $\frac{a^3 - b^3}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x - y}{a - b}$
19. $\frac{30 - 7x - x^2}{24 - 2x - x^2} \cdot \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 7x - 30}$
20. $\frac{7x + 21y}{x^2 - 9y^2} \cdot \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{x^2 - 2xy - 3y^2}$
21. $\frac{2bx - b}{2ax - 14a} \cdot \frac{x^2 - 49}{6x^2 - 7x + 2}$
22. $\frac{a^2 - 4}{2a^2 - 5a + 2} \cdot \frac{2a - 1}{a^3 + 8}$
23. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 7} \div \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$
24. $\frac{2xy + 2y^2}{3y^2 - xy - 4x^2} \div \frac{3x^2 + 3xy}{9y^2 - 16x^2}$
25. $\frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{a^2 + 3a + 9} \div \frac{a^2 + 3a + 2}{a^3 - 27}$
26. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{4x^2 - 1} \div \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1}$
27. $\frac{4x^2 - 1}{2x^2 - 5x - 3} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{4x^2 - 8x + 3} \cdot \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 7x + 12}$
28. $\frac{(x - 3)^3}{6x^2 - 19x + 3} \cdot \frac{6x^2 + 35x + 36}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 37x + 36}$
29. $\left(\frac{x^2}{1 - x^2} \div \frac{2x}{1 - x}\right) \div \frac{1 - x}{1 + x}$
30. $\frac{x^2}{1 - x^2} \div \left(\frac{2x}{1 - x} \div \frac{1 - x}{1 + x}\right)$
31. $\frac{3a^2 - a - 10}{8a^2 - 2a - 3} \cdot \frac{10a^2 + a - 2}{3a^2 + 20a + 25} \div \frac{5a^2 + 8a - 4}{12a^2 + 11a - 15}$
32. $\frac{x^2 + 4xy - 12y^2}{x^2 + 7xy + 6y^2} \cdot \frac{x^2 - 6xy - 7y^2}{x^2 - xy - 12y^2} \div \frac{x^2 - 9xy + 14y^2}{x^2 - xy - 12y^2}$
33. $\frac{3x^2 + 4xy + y^2}{4x^2 + 2xy - 2y^2} \cdot \frac{3x^2 + 13xy - 10y^2}{x^2 - 4y^2} \div \frac{9x^2 - 12xy + 4y^2}{2x^2 - 5xy + 2y^2}$

## 4-7. ADICION DE FRACCIONES

La suma de dos o más fracciones con el mismo denominador es igual a la fracción cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores y cuyo denominador es el denominador común (Teorema 2-17). El resultado obtenido de esta manera es usualmente llamado adición, aun cuando las fracciones pueden estar precedidas del signo menos. Para sumar fracciones que tienen diferentes denominadores, es necesario expresar en primer lugar las fracciones como fracciones equivalentes con un denominador común (Teorema 2-18). En vista de las circunstancias, vamos a introducir la idea de un múltiplo común de polinomios.

Un polinomio que es exactamente divisible entre dos o más polinomios es llamado un *múltiplo común* de dichos polinomios. El múltiplo común determinado en la siguiente manera es llamado el *mínimo común múltiplo* (M. C. M.).

1. Factorizar cada uno de los polinomios dados.
2. Forme un producto usando todos los factores primos diferentes de los polinomios, dando a cada factor primo el más grande de los exponentes que lo afectan en el conjunto de polinomios.

EJEMPLO 1. Encontremos el M. C. M. de los polinomios

$$6x^2 + 3x - 3, \qquad 7x^2 - 14x + 7, \qquad 12x^2 - 12$$

*Solución.* Factorizando cada polinomio, obtenemos

$$6x^2 + 3x - 3 = 3(2x^2 + x - 1) = 3(2x - 1)(x + 1)$$

$$7x^2 - 14x + 7 = 7(x^2 - 2x + 1) = 7(x - 1)^2$$

$$12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 2^2 \cdot 3(x + 1)(x - 1)$$

Eligiendo la potencia adecuada de cada factor primo, obtenemos

$$2^2 \cdot 3 \cdot 7(2x - 1)(x + 1)(x - 1)^2 = 84(2x - 1)(x + 1)(x - 1)^2$$

que es el mínimo común múltiplo de los polinomios dados.

El M. C. M. puede expresarse en forma factorizada o puede llevarse a cabo la multiplicación. La forma factorizada, sin embargo, es usualmente más conveniente.

Al sumar fracciones, usaremos el M. C. M. de los varios denominadores como común denominador. De este modo, se le llamará el *mínimo común denominador* (M. C. D.). Habiendo encontrado el

M. C. D., obtenemos la suma de las fracciones mediante las siguientes operaciones.

1. Multiplique el numerador y denominador de cada fracción por el cociente obtenido al dividir el M. C. M. por el denominador de tal fracción.
2. Sume los numeradores obtenidos, teniendo cuidado de invertir los signos de todos los términos del numerador de cualquier fracción que esté precedida por un signo menos. Esto nos da el numerador de la suma de las fracciones; el denominador es el común denominador.

EJEMPLO 1. Sumemos las fracciones

$$\frac{2}{(x-3)(x+4)} + \frac{3}{(3-x)(2x+1)}$$

*Solución.* El factor $3 - x$ en el segundo denominador es el negativo del factor $x - 3$ en el primer denominador. Resulta conveniente entonces invertir los signos de los términos de $3 - x$ y cambiar de más a menos el signo que antecede a la fracción. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{(x-3)(x+4)} - \frac{3}{(x-3)(2x+1)} \\
&\quad = \frac{2(2x+1)}{(x-3)(x+4)(2x+1)} - \frac{3(x+4)}{(x-3)(x+4)(2x+1)} \\
&\quad = \frac{4x+2-3x-12}{(x-3)(x+4)(2x+1)} \\
&\quad = \frac{x-10}{(x-3)(x+4)(2x+1)}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Combinemos $\dfrac{12x^2}{9x^2-1} - \dfrac{2x}{3x-1} - \dfrac{3x}{3x+1}$ en una fracción sencilla.

*Solución.* Factorizando el denominador de la primera fracción, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{12x^2}{(3x+1)(3x-1)} - \frac{2x}{3x-1} - \frac{3x}{3x+1} \\
&\qquad = \frac{12x^2 - 2x(3x+1) - 3x(3x-1)}{(3x+1)(3x-1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{12x^2 - 6x^2 - 2x - 9x^2 + 3x}{(3x + 1)(3x - 1)}$$

$$= \frac{-x(3x - 1)}{(3x + 1)(3x - 1)} = \frac{-x}{3x + 1}$$

## *EJERCICIO 4-6*

**Encuentre el M. C. M. y deje cada resultado en la forma factorizada, exceptuando al coeficiente numérico.**

1. $18x^2y,\ 20xy^2,\ 30x^3y$
2. $60xy^2,\ 36x^3,\ 84y^3z^2$
3. $a^2 - 4,\ 4a^2 - 8a,\ 3a^2 + 6a$
4. $9a^2 - 1,\ 6a^3 - 2a^2,\ 9a + 3$
5. $3x^2 - 5xy - 2y^2,\ 2x^2 + 5xy + 2y^2,\ 6x^2 + xy - y^2$
6. $2x^2 - xy - 3y^2,\ x^2 - xy - 2y^2,\ 2x^2 - 7xy + 6y^2$

**Combine en una fracción única en sus términos mínimos.**

7. $\dfrac{2x - 3y}{3z} + \dfrac{3x + 4y}{3z}$
8. $\dfrac{x + y}{x - 6} - \dfrac{5x - 2y}{x - 6}$
9. $\dfrac{x + 2}{x - 3} + \dfrac{x - 2}{3 - x}$
10. $\dfrac{a}{5} - \dfrac{a}{10} + \dfrac{7a}{25}$
11. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$
12. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3}$
13. $\dfrac{a}{a + 5} - \dfrac{2}{a}$
14. $\dfrac{2x}{x - 5} + \dfrac{5}{x - 2}$
15. $\dfrac{4}{a - 9} - \dfrac{3}{a + 3}$
16. $\dfrac{3}{a - b} + \dfrac{4}{a + 2b}$
17. $\dfrac{2}{y - 2} + \dfrac{3}{4 - y^2}$
18. $\dfrac{2a - 1}{4 - a} - \dfrac{a + 2}{3a - 12}$
19. $\dfrac{2y - b}{1} + \dfrac{1}{2y + b}$
20. $a + 2b - \dfrac{a^2}{a - 3b}$
21. $\dfrac{a + 3}{a^2 + 1} + 2a - 4$
22. $\dfrac{2m}{m - 3} - \dfrac{4m}{m + 6} - 2$
23. $3 - \dfrac{4m}{m + 3} + \dfrac{m + 2}{m - 5}$
24. $\dfrac{2}{x - 3} + \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 1}$
25. $\dfrac{2}{3 - x} + \dfrac{3}{1 - x} - \dfrac{2}{2 - x}$
26. $\dfrac{x + 3}{1 + x} - \dfrac{x + 4}{1 - x} + \dfrac{x - 5}{2 - x}$
27. $\dfrac{x - 4}{x - 1} - \dfrac{x + 5}{x - 2} - \dfrac{x + 3}{x + 2}$
28. $\dfrac{2x}{x - 1} + \dfrac{3x}{x + 1} - \dfrac{4x^2}{x^2 - 1}$
29. $\dfrac{16x^2}{4x^2 - 1} - \dfrac{4x}{2x - 1} - \dfrac{6x}{2x + 1}$
30. $\dfrac{2x}{3x - 1} + \dfrac{3x}{3x + 1} - \dfrac{12x^2}{9x^2 - 1}$
31. $\dfrac{x + 1}{2x - 3} - \dfrac{x - 1}{2x + 3} - \dfrac{2x^2 - 7x}{9 - 4x^2}$
32. $\dfrac{1}{x - y} - \dfrac{1}{x + y} + \dfrac{2x}{y^2 - x^2}$
33. $\dfrac{m^2 - 1}{m^3 + 1} - \dfrac{2}{m^2 - m + 1}$
34. $\dfrac{3x + y}{x^2 - y^2} - \dfrac{2y}{x^2 - xy} - \dfrac{1}{x + y}$
35. $\dfrac{2a^2 - 5b^2}{a^2 + ab - 2b^2} + \dfrac{a - 2b}{a + 2b} - \dfrac{a - 2b}{a - b}$
36. $\dfrac{2}{y^2 + 7y + 12} + \dfrac{5y + 10}{y^2 + 3y - 4} + \dfrac{y + 4}{y^2 + 2y - 3}$
37. $\dfrac{1}{2a^2 + 3a + 1} + \dfrac{5a}{2a^2 - a - 3} + \dfrac{a + 2}{4a^2 - 4a - 3}$

## 4-8. FRACCIONES COMPLEJAS

Hasta este punto del capítulo, hemos considerado fracciones simples —fracciones cuyos numeradores y denominadores son no fraccionarios—. Introducimos ahora fracciones que contienen una fracción en el numerador o denominador, o en ambos. Una fracción de esta clase es llamada una *fracción compleja.*

Que simplifiquemos una fracción compleja, significa que expresemos ésta como una fracción equivalente que no tiene fracciones en el numerador ni en el denominador. La simplificación podemos llevarla a cabo por cualquiera de los siguientes métodos. Hay ocasiones en que uno de los métodos es más conveniente que el otro.

1. Reduzcamos el numerador y denominador a fracciones simples y luego dividamos.
2. Multipliquemos el numerador y el denominador de la fracción principal por una expresión tal que el numerador y denominador de la nueva fracción sean no fraccionarios.

EJEMPLO 1. Simplifiquemos la fracción compleja $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$.

*Solución.* Combinando las fracciones del numerador y el denominador, tenemos

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a} = \frac{b+a}{b-a}$$

EJEMPLO 2. Simplifiquemos la fracción compleja $\dfrac{\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x+2}}{\frac{8}{x-2}+4}$

*Solución.*

$$\frac{\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x+2}}{\frac{8}{x-2}+4} = \frac{\frac{x^2+3x+2-(x^2-3x+2)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{8+4x-8}{x-2}}$$

$$= \frac{6x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x-2}{4x} = \frac{3}{2(x+2)}$$

También simplificamos la fracción dada, multiplicando el numerador y denominador por el M. C. M. de los denominadores de las tres fracciones simples que aparecen. Así, tenemos

$$\frac{(x-2)(x+2)\left[\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x+2}\right]}{(x-2)(x+2)\left[\dfrac{8}{x-2}+4\right]}=\frac{(x+2)(x+1)-(x-2)(x-1)}{8(x+2)+4(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2+3x+2-(x^2-3x+2)}{8x+16+4(x^2-4)}$$

$$=\frac{6x}{4x^2+8x}=\frac{3}{2(x+2)}$$

## *EJERCICIO 4-7*

**Simplifique las fracciones complejas.**

1. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}}$

2. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}}{1-\frac{2}{21}}$

3. $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{x}-\frac{1}{2}}$

4. $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{1+\frac{ac}{bd}}$

5. $\dfrac{\frac{3}{x}-1}{\frac{3}{x}+1}$

6. $\dfrac{x-1+\frac{2}{x}}{x+1-\frac{2}{x}}$

7. $\dfrac{4-\frac{4x-3}{x}}{2-\frac{x-1}{x}}$

8. $\dfrac{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$

9. $\dfrac{\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x+1}}$

10. $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}$

11. $\dfrac{\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{3x-1}}{\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3x-1}}$

12. $\dfrac{\frac{x-y}{x+y}+\frac{1}{x^2-y^2}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}$

13. $\dfrac{3-\frac{x-6}{x^2-6x+8}}{2+\frac{x+7}{x^2-2x-8}}$

14. $\dfrac{1-\frac{x-6}{x^2-x-6}}{2+\frac{x+6}{x^2-x-6}}$

15. $\dfrac{1+\frac{9}{x^2+2x-8}}{1+\frac{6}{x^2+x-6}}$

16. $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}-1}{\frac{2x}{y-x}+2}$

17. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

18. $\dfrac{x}{x-\frac{x}{2-\frac{1}{x}}}$

## EJERCICIO DE REVISION

Factorice las siguientes expresiones (Secs. 4-1, 4-2, y 4-3).

**1.** $x^2 - 3xy + x$ **2.** $2ab^2 - 4ab + 2a^2b$
**3.** $9a^2 - 1$ **4.** $4x^2 - 9y^2$ **5.** $8m^2 - 2n^2$
**6.** $3xy^2 - 12x^3$ **7.** $8 + a^3$ **8.** $y^3 - 64$
**9.** $8m^3 + 27n^3$ **10.** $3ap^3 + 24aq^3$
**11.** $1 - (x + y)^3$ **12.** $(x + y)^3 + 1$
**13.** $x^2 - 9x + 20$ **14.** $x^2 - 2x - 24$
**15.** $4 - 4a + a^2$ **16.** $m^2n^2 + 13mn + 42$
**17.** $2x^2 + 7x + 6$ **18.** $6a^2 + a - 12$
**19.** $x^4 - 3x^2 - 4$ **20.** $x^6 + x^3 - 2$
**21.** $9x^2 + 6xy + y^2$ **22.** $4a^2 - 20ab + 25b^2$
**23.** $4(a - b) - a(a - b)$ **24.** $x(y + 2) - y(y + 2)$
**25.** $a^3(x - y) - 8b^3(x - y)$ **26.** $8a + 2ab - 4ay - aby$
**27.** $x^2 - y^2 + 3x - 3y$ **28.** $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y$
**29.** $x^2 - x - 2 + xy - 2y$ **30.** $m^3 - n^3 - m^2 + 2mn - n^2$
**31.** $25 - a^2 + 6a - 9$ **32.** $9x^2 - 6xy + y^2 - 16a^2$
**33.** $2x^2 - xy + xz - 2x + y - z$ **34.** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
**35.** $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$ **36.** $1 - 12x + 48x^2 - 64x^3$
**37.** $m^2 + n^2 + 9 + 2mn - 6m - 6n$
**38.** $x^2 - 4xy + 4y^2 - a^2 - 2ab - b^2$
**39.** $16x^4 - y^4$ **40.** $25a^4 - 16$ **41.** $8m^6 + n^6$
**42.** $m^6 - y^3$ **43.** $x^4 + x^2 + 1$ **44.** $m^4 + 3m^2 + 4$
**45.** $4x^4 - 21x^2y^2 + 9y^4$ **46.** $9x^4 - 31x^2y^2 + y^4$
**47.** $(x + y)^2 + 3(x + y) - 4$ **48.** $(2x + y)^2 - (2x + y) - 6$
**49.** $9(m - n)^2 - 9(m - n) + 2$

Haciendo sólo cambios de signos, encuentre otras tres fracciones que sean iguales a cada una de las fracciones dadas (Sec. 4-4).

**50.** $\dfrac{x - 7}{4 - x}$ **51.** $\dfrac{x^2 - 3}{4x + 2}$ **52.** $\dfrac{x^2 - x - 5}{x^2 + x + 3}$

**53.** $\dfrac{2 - x - x^2}{1 + x - x^2}$

Lleve a cabo las operaciones indicadas y exprese cada resultado en términos mínimos (Secs. 4-5 y 4-6).

**54.** $\dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 5x + 2}$

**55.** $(x^2 - y^2) \cdot \dfrac{3x^2 + xy - 4y^2}{2x^2 + 3xy + y^2} \cdot \dfrac{2x + y}{(x - y)^2}$

**56.** $\dfrac{6x^2 - xy - y^2}{3x^2 + 7xy + 2y^2} \cdot \dfrac{x^2 + 5xy + 6y^2}{2x^2 + xy - y^2} \div \dfrac{x^2 - 9y^2}{x^2 - y^2}$

**57.** $\dfrac{6x^2 + 13xy + 5y^2}{2xy - x^2} \cdot \dfrac{2x^2 - 7xy + 3y^2}{y^2 - 4x^2} \div \dfrac{3x^2 - 4xy - 15y^2}{2x^2 - 4xy}$

58. $\dfrac{y^2 - 5xy + 6x^2}{y^2 + 7xy + 10x^2} \cdot \dfrac{y^2 - 25x^2}{y^2 + xy - 6x^2} \div \dfrac{y^2 - 3xy - 10x^2}{y^2 + 5xy + 6x^2}$

59. $\dfrac{3x^2 + 13xy - 10y^2}{x^2 - 4y^2} \cdot \dfrac{3x^2 + 4xy - 4y^2}{4x^2 - 4xy + y^2} \div \dfrac{9x^2 - 12xy + 4y^2}{2x^2 - 5xy + 2y^2}$

60. $\left(\dfrac{x^2}{1 - x^2} \div \dfrac{2x}{1 - x}\right) \div \dfrac{1 - x}{1 + x}$

61. $\dfrac{x^2}{1 - x^2} \div \left(\dfrac{2x}{1 - x} \div \dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

Combine los siguientes en una fracción única en términos mínimos. (Sec. 4-4).

62. $\dfrac{3x - 1}{(x - 1)(x + 1)} - \dfrac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} - \dfrac{1}{x + 2}$

63. $\dfrac{2a + 1}{a^2 + a - 2} + \dfrac{3a - 2}{a^2 - 4} - \dfrac{2a - 3}{a^2 - 3a + 2}$

64. $\dfrac{2x^2 - 5y^2}{x^2 + xy - 2y^2} - \dfrac{x - 2y}{x - y} + \dfrac{x - 2y}{x + 2y}$

65. $\dfrac{2m + 7}{2m^2 + 5m - 7} - \dfrac{m - 2}{2m^2 + 3m - 14} - \dfrac{m - 1}{m^2 - 3m + 2}$

66. $\dfrac{3}{x^3 + 3x^2 - x - 3} - \dfrac{2}{x^3 - x^2 - 3x + 3} + \dfrac{4}{x^3 + x^2 - 3x - 3}$

Simplifique las fracciones complejas (Sec. 4-8).

67. $\dfrac{x - \dfrac{x^2 + 1}{2x}}{\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}}$

68. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x + 1}}{\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x + 1}}$

69. $\dfrac{x + \dfrac{x - 1}{x + 1}}{x - \dfrac{x - 1}{x + 1}}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{1}{x - 3}}{\dfrac{4}{x + 3} - \dfrac{2}{x - 3}}$

71. $\dfrac{\dfrac{x + y}{x - y} - \dfrac{x - y}{x + 1}}{\dfrac{x}{x - y} - \dfrac{x}{x + 1}}$

72. $\dfrac{1 + \dfrac{6}{x^2 + x - 6}}{1 + \dfrac{9}{x^2 + 2x - 8}}$

73. $\dfrac{1 - \dfrac{6d}{2c + 3d}}{2 + \dfrac{d}{c - 2d}}$

74. $\dfrac{\dfrac{2x}{y - x} + 2}{\dfrac{x^2}{x^2 - y^2} - 1}$

75. $\dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{1 + (2/x)}}$

76. ¿Para qué valores de $x$ la fracción $\dfrac{x(2 - x)}{x^2 - 3x + 2}$ no es igual a $\dfrac{x}{1 - x}$?

77. ¿Está definida la fracción $\dfrac{x - 3}{2 + x^2}$ para todos los valores reales de $x$?

78. ¿Está definida la fracción $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = x - 3$ para todos los valores reales de x?

Capítulo 5

# FUNCIONES Y RELACIONES

## 5-1. COORDENADAS RECTANGULARES

En la Sec. 2-5 discutimos un esquema o método general que establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números reales y los puntos de una línea. Desarrollamos ahora un plan para establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de un plano y el conjunto de parejas de números reales. El instrumento para realizar esta asociación de puntos y parejas de números es llamado un *sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.* Este sistema de coordenadas fue introducido en 1637 por René Descartes, un matemático y filósofo francés. El sistema cartesiano y otros sistemas coordenados hacen posible la reducción de los problemas geométricos a problemas aritméticos y, por tanto, han contribuido grandemente al avance de las matemáticas y sus aplicaciones en varias zonas del aprendizaje.

Trazamos una línea recta horizontal y otra línea recta vertical que se encuentran en un punto $O$ (Fig 5-1). El punto $O$ es llamado el *origen;* la línea horizontal OX, el *eje* $x$*;* y la línea vertical OY, el *eje* $y$. Con una unidad de medida conveniente establecemos una escala numérica en cada eje, de la cual el origen es el punto cero. Los números positivos están a la derecha sobre el eje $x$ y hacia arriba del origen sobre el eje $y$. Colocamos puntas de flechas sobre los ejes para indicar el sentido positivo en cada uno de ellos.

Con cada punto P del plano determinado por los ejes asociaremos una pareja de coordenadas. Las coordenadas se definen en términos de las distancias perpendiculares desde los ejes hasta el punto.

**Definición 5-1.** La *coordenada* $x$, o *abscisa,* de un punto $P$ es la distancia dirigida desde el eje $y$ hasta el punto.

La *coordenada* $y$, u *ordenada,* de un punto es la distancia dirigida desde el eje $x$ hasta el punto.

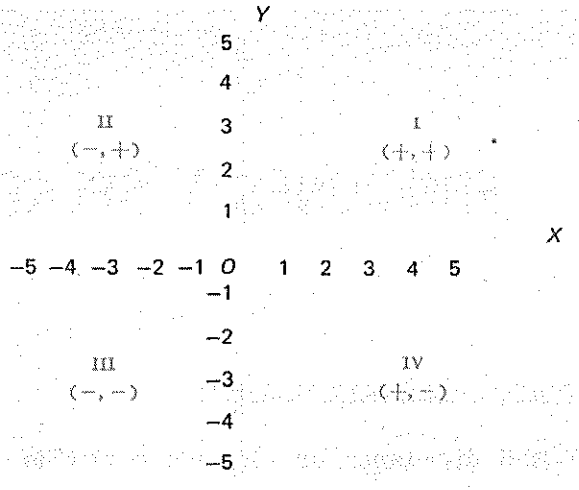



*Figura 5-1*

La abscisa de un punto $P$ es positiva si $P$ está a la derecha del eje $y$ y negativa si está a la izquierda del mismo; la ordenada es positiva si $P$ está arriba del eje $x$ y negativa si está abajo. Un punto cuya abscisa es $x$ y cuya ordenada es $y$ se designa mediante $(x, y)$, la abscisa siempre será colocada en primer término. Así, las coordenadas de un punto son conocidas como una *pareja ordenada* de números.

Un punto de coordenadas dadas será localizado midiendo las distancias apropiadas desde los ejes y marcando el punto así encontrado. Por ejemplo, si las coordenadas de un punto son $(-4, 3)$, la abscisa $-4$ significa que el punto está 4 unidades a la izquierda del eje $y$ y la ordenada 3 (signo positivo sobreentendido) que el punto está 3 unidades arriba del eje $x$. En consecuencia, localizamos el punto yendo 4 unidades hacia la izquierda desde el origen a lo largo del eje $x$ y entonces 3 unidades hacia arriba y paralelamente al eje $y$ (Fig. 5-2).

Los ejes de coordenadas dividen a su plano en cuatro partes, llamadas *cuadrantes*, que en la Fig. 5-1 están numerados de I a IV. Las coordenadas de un punto en el primer cuadrante son ambas positivas, lo cual se indica en la figura mediante $(+, +)$. Los signos de las coordenadas en cada uno de los otros cuadrantes están indicados de manera semejante.

Se supone que a cada pareja de números reales (coordenadas) corresponde un punto definido. Recíprocamente, suponemos que a cada punto del plano corresponde una pareja definida de coordena-

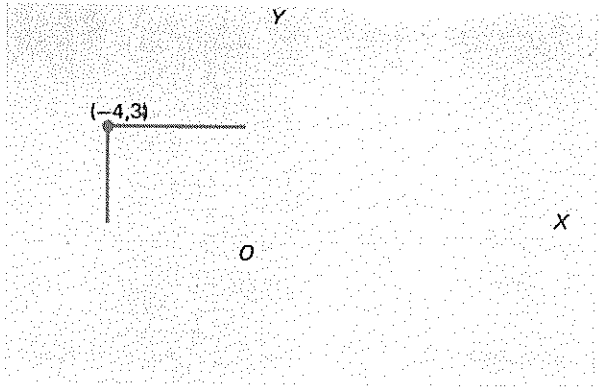



*Figura 5-2*

das. Esta relación de puntos en un plano y parejas de números reales es llamada *correspondencia uno-a-uno.*

El producto cartesiano de dos conjuntos de números reales $A$ y $B$ se define como el conjunto de todas las parejas ordenadas $(x, y)$ tales que $x$ es un miembro de $A$, y $y$ es un miembro de $B$. Usando esta definición y haciendo $A = B = R$, podemos denotar el conjunto de parejas de números que corresponden a los puntos de un plano de coordenadas mediante la notación.

$$R \times R = \{(x, y) | x \in R, y \in R\}$$

## 5-2. RELACIONES Y FUNCIONES

Los conceptos de relación y función, que discutiremos en este capítulo, son fundamentales en muchas áreas de las matemáticas. Empezamos nuestra discusión definiendo una relación.

**Definición 5-2.** Una *relación* es un conjunto de parejas ordenadas de números. El conjunto de los primeros elementos de las parejas es llamado el *dominio* de la relación y el conjunto de los segundos elementos es llamado el *rango* de la relación.

EJEMPLO 1. El conjunto de parejas de números

$$\{(-1, -1), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (3, 0)\}$$

define una relación. El conjunto $\{-1, 0, 1, 3\}$ es el dominio y el conjunto $\{-1, 1, 2, 0\}$ es el rango. La gráfica de la relación aparece en la Fig. 5-3.

EJEMPLO 2. Las relaciones son determinadas frecuentemente por un dominio que se da a la vez que una ecuación para

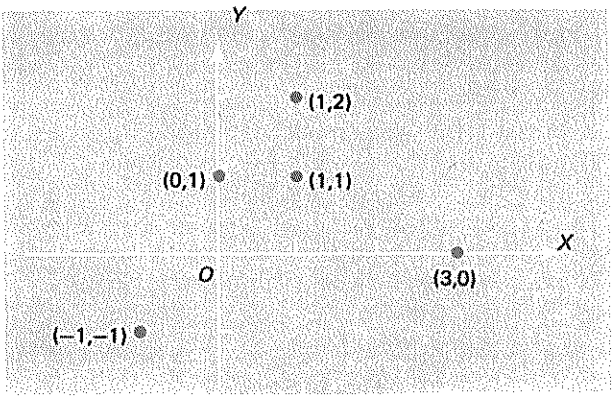



*Figura 5-3*

calcular el segundo elemento de cada pareja, a partir de la primera. Como ilustración, consideramos la relación en la que el segundo número de la pareja $(x, y)$ está dado por la ecuación $y = 3x + 1$ siendo el dominio de la relación el conjunto de números reales $R$. Estas condiciones definen perfectamente una relación. El conjunto de números de la relación, con el dominio especificado, puede expresarse en la forma

$$\{(x, y) | y = 3x + 1\}$$

Esta relación consta de una infinidad de parejas de números, y los elementos de la relación no podrán, por tanto, ser enlistados. Desde luego, podemos encontrar $y$ para cualquier valor particular de $x$. Así, las parejas de números que corresponden a $x = -2$, 0 y 3 son

$$(-2, -5), (0, 1), (3, 10)$$

En este capítulo trataremos principalmente con un tipo especial de relación que se define como sigue.

**Definición 5-3.** Sean $X$ y $Y$ conjuntos de números reales y consideremos un conjunto de parejas $(x, y)$ tales que el primer elemento $x \in X$ y el segundo $y \in Y$, y tal que si dos parejas tienen un mismo primer elemento entonces necesariamente tienen un mismo segundo elemento. A tal conjunto de parejas ordenadas de números reales se le llama una *función*. El conjunto $X$ es llamado el dominio de la función y el conjunto $Y$ es llamado el *rango* de la función.

Recalcamos que esta definición requiere que para cualquier valor de $x$ del dominio exista uno y sólo un correspondiente valor de $y$. Una relación no obedece a esta condición. En consecuencia, en una relación podemos tener más de un valor del rango correspondiendo a un valor del dominio. Así, vemos que una función es una relación, pero que ésta no es necesariamente una función. Considere, como ejemplo, los conjuntos

$$\{(x, y) | y = \sqrt{x}\} \quad \text{y} \quad \{(x, y) | y = \pm\sqrt{x}\}$$

siendo el dominio de cada conjunto igual a X = {1, 2, 3}. El primer conjunto tiene un valor único de $y$ para cada valor de $x$, y es, en consecuencia, tanto una función como una relación. El segundo conjunto, que tiene dos valores de $y$ para cada valor de $x$, es una relación, pero no una función. Observamos también que el conjunto de parejas de números del Ej. 1 anterior es una relación, pero no una función, mientras que el conjunto de parejas de números del Ej. 2 es una relación y también una función.

El segundo elemento de una pareja numérica perteneciente a una función es llamado el *valor de la función* correspondiente al valor del primer elemento. El valor de una función en $x$ es a veces denotado por $f(x)$ que se lee "$f$ de $x$". Debe advertirse que el símbolo no es un producto; no es $f$ veces $x$. Supóngase, por ejemplo, que definimos una función dando un cierto dominio y una ecuación tal como $y = x^2 - 2x$. Puesto que $y = f(x)$, podemos escribir la ecuación como

$$f(x) = x^2 - 2x$$

La ecuación proporciona el valor de la función en cualquier valor escogido de $x$. Por ejemplo, denotando el valor de la función en $x = 3$, mediante $f(3)$ y sustituyendo para $x$, encontramos

$$f(3) = 3^2 - 2(3) = 3$$

De manera semejante,

$$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) = 8$$

$$f(5) = 5^2 - 2(5) = 15$$

Por tanto $(3, 3)$, $(-2, 8)$, $(5, 15)$ son tres elementos de la función.

Aunque una función o una relación puede quedar completamente definida por una ecuación y un dominio especificados, es frecuente que se dé una ecuación sin mencionar el dominio. En tales casos, debe entenderse que el dominio consiste en todos los núme-

ros reales para los cuales la ecuación nos da números reales como valores de la función o relación.

EJEMPLO 3. Encontrar el dominio y rango de la función definida por $y = \sqrt{9 - x^2}$.

*Solución.* La raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. Esto es cierto porque el cuadrado de números positivos o negativos siempre es positivo. Así pues, el dominio de esta función consiste en el conjunto de todos los números comprendidos entre $-3$ y 3, inclusive. Cualquier valor de $x < -3$ o de $x > 3$ hace a $9 - x^2$ negativo y no pertenece al dominio. El rango consiste en el conjunto de todos los números comprendidos entre 0 y 3, inclusive. Usamos los símbolos $\leq$ (léase "es menor que o igual a") y expresamos estas descripciones del dominio y rango mediante

$$X = \{x | -3 \leq x \leq 3\} \qquad Y = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$$

## *EJERCICIO 5-1*

1. Localice los puntos cuyas coordenadas son (4, 3), (4, $-3$), ($-4$, 3), ($-4$, $-3$).
2. ¿En qué cuadrante está localizado un punto si (a) ambas coordenadas son positivas, (b) ambas coordenadas son negativas, (c) la abscisa es positiva y la ordenada negativa?
3. ¿Dónde está situado un punto si (a) su ordenada es cero, (b) su abscisa es cero?
4. ¿Qué puntos tienen abscisa igual a 3? ¿Qué puntos tienen su ordenada igual a $-4$?
5. ¿Dónde puede estar un punto si (a) la abscisa es igual a la ordenada, (b) la abscisa es igual al negativo de la ordenada?
6. Tres vértices de un rectángulo están en los puntos $A(2, 3)$, $B(6, 0)$ y $C(8, 11)$. Encontrar las coordenadas del cuarto vértice y trazar el rectángulo.
7. Los puntos $A(0, 0)$, $B(5, 1)$ y $C(1, 3)$ son vértices de un paralelogramo. Encontrar las coordenadas del cuarto vértice (a) si $AB$ es una diagonal, (b) si $AC$ es una diagonal, (c) si $BC$ es una diagonal.
8. Los puntos ($-2$, $-1$), (4, 0) y (3, 3) son vértices de un paralelogramo. Encontrar las tres posiciones posibles del cuarto vértice.

Determine cuáles de los siguientes conjuntos de parejas de números determinan una función. Dé una lista de los elementos del dominio y de los elementos del rango de cada función.

9. $\{(2, 1), (3, -1), (4, -3)\}$
10. $\{(-2, 4), (0, 5), (1, -3)\}$
11. $\{(2, 0), (2, 3), (5, 0)\}$
12. $\{(3, a), (4, b), (5, c)\}$
13. $\{(5, 1), (1, 5), (5, 2)\}$
14. $\{(x, y), (y, x), (x, y)\}$

15. Si $f(x) = 1 - x$, encontrar (a) $f(0)$, (b) $f(-1)$, (c) $f(11)$.
16. Si $g(t) = t^2 - 2t - 3$, encontrar (a) $g(3)$, (b) $g(-1)$, (c) $g(4)$.
17. Si $h(s) = (s - 1)/(s + 2)$, encontrar (a) $2h(-1)$, (b) $[h(-1)]^2$ $h(2s)$.
18. Si $F(t) = (2t - 1)/t$, encontrar (a) $F(2)$, (b) $F(\frac{1}{2})$, (c) $F(t^2)$.
19. Si $f(x) = x^2$, encontrar (a) $f(x + h)$, (b) $f(x + h) - f(x)$.

Determine el dominio y el rango de la función definida por cada una de las siguientes ecuaciones.

20. $f(x) = x^2 - 4$
21. $f(x) = \sqrt{3x}$
22. $f(x) = 1/(x - 2)$
23. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$
25. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

## 5-3. GRAFICAS DE FUNCIONES Y RELACIONES

Consideremos la función definida por la ecuación

$$f(x) = x^2 - 3x - 2$$

Si asignamos un valor a $x$, podremos calcular el valor correspondiente de $f(x)$. En la tabla se muestran varios de los valores de $x$ y sus correspondientes valores de $y = f(x)$. Estas parejas de números proporcionan una imagen de la relación de $x$ y $y$. Podemos obtener una mejor representación, sin embargo, localizando cada valor de $x$ y el correspondiente valor de $y$ como abscisa y ordenada de un punto, y trazando después una curva suave a través de los puntos así determinados. Este proceso es llamado *graficar la función*, y la curva es llamada la *gráfica* o *lugar geométrico* de la función.

| $x$ | $-1.5$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $4.5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $4.75$ | $2$ | $-2$ | $-4$ | $-4$ | $-2$ | $2$ | $4.75$ |

Los puntos localizados (Fig. 5-4) están entre $x = -1.5$ y $x = 4.5$. Puntos más a la izquierda y más a la derecha, así como cualquier número de puntos intermedios, podrían ser localizados. Pero los puntos ya localizados dan un idea de la posición de los intermedios. Podemos, por tanto, usar tan sólo algunos puntos para trazar una curva que resulte suficientemente precisa. La gráfica exacta satisface a la siguiente definición.

**Definición 5-4.** La gráfica de la función (o relación) consiste en el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas son las parejas ordenadas de la función (o relación). Si la función o la relación

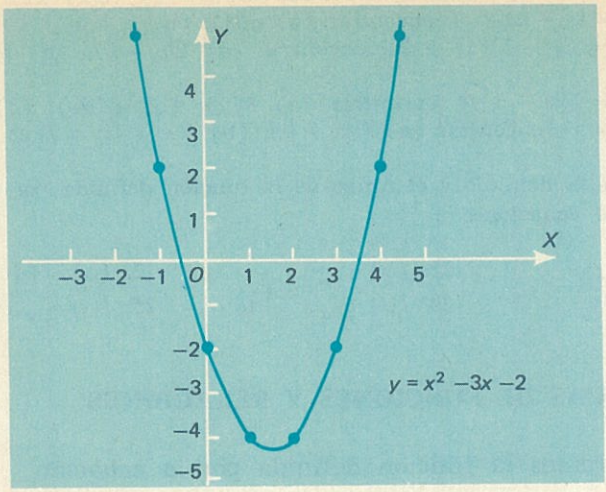



*Figura 5-4*

está definida por una ecuación, la gráfica de la ecuación es la misma que la gráfica de la función (o relación).

El punto o los puntos de la gráfica de una función que están sobre el eje de las $x$ son de interés especial. La abscisa de un punto tal anula al valor de $y$, o bien anula la función, y es llamado un *cero de la función*. Damos una estimación de las abscisas de los puntos donde la gráfica de la Fig. 5-4 corta al eje $x$: tales valores son aproximadamente $x = -0.6$ y $x = 3.6$. Estos valores son aproximaciones a los ceros de la función representada por la gráfica. En el Cap. 8 discutiremos detalladamente los ceros de las funciones.

EJEMPLO 1. Tracemos la gráfica de la función definida por $y = 1 - 2x$.

*Solución.* Asignamos ciertos valores a $x$ y obtenemos los valores correspondientes de $y$, como se muestra en la tabla. Los valores tabulados nos permiten localizar algunos puntos de la gráfica y trazar la gráfica a través de ellos (Fig. 5-5). La gráfica es una línea recta y muestra que el cero de la función es $x = \frac{1}{2}$.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $5$ | $3$ | $1$ | $-1$ | $-3$ | $-5$ |

EJEMPLO 2. Trazar la gráfica de $y = |x - 2|$.

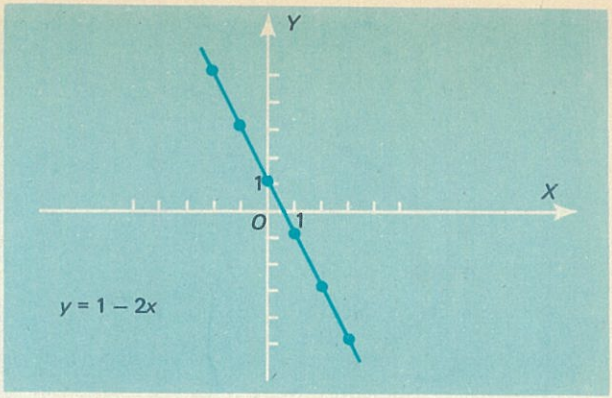



*Figura 5-5*

*Solución.* Recordando la definición del valor absoluto de un número (Sec. 3-1), preparamos una tabla de valores y bosquejamos la gráfica mostrada en la Fig. 5-6.

| $x$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 2 | 0 | 2 | 4 |

EJEMPLO 3. Construyamos la gráfica de la relación definida por $y^2 = 4x$.

*Solución.* Resolviendo para $y$ tenemos $y = \pm 2\sqrt{x}$. Trazamos la gráfica (Fig. 5-7) usando la siguiente tabla.

| $x$ | 0 | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $\pm 2$ | $\pm 4$ | $\pm 6$ |

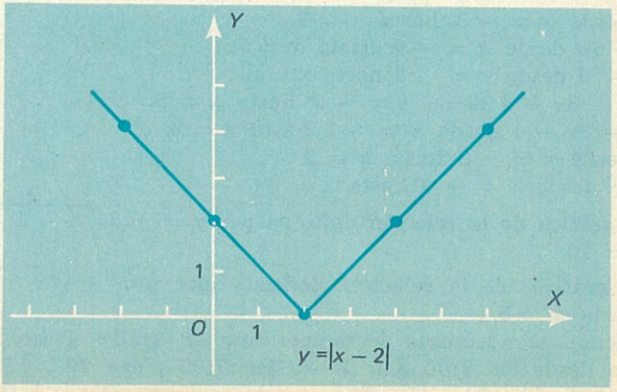



*Figura 5-6*

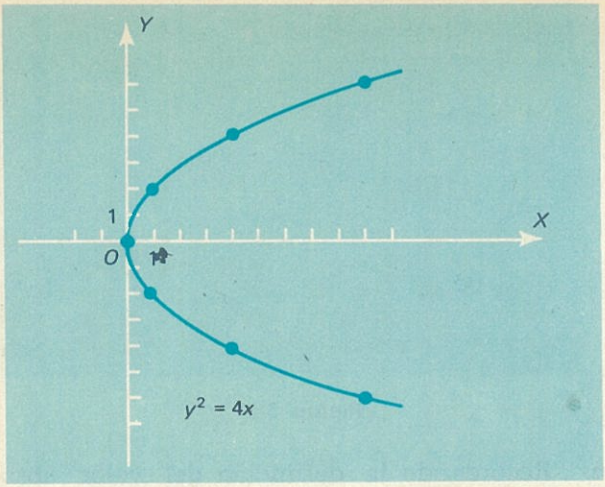



*Figura 5-7*

## *EJERCICIO 5-2*

Trace la gráfica de la función definida por cada una de las siguientes ecuaciones. Dé los ceros de las funciones.

1. $y = x - 3$
2. $y = 2x + 5$
3. $y = -x - 1$
4. $3x - y = 6$
5. $x + 3y - 3 = 0$
6. $2x - y = 0$
7. $y = |x|$
8. $y = 1 - |x|$
9. $y = |x + 2|$

Trace la gráfica de la función definida por cada una de las siguientes ecuaciones y dé (o estime) sus ceros. Use todos los valores enteros de $x$ en el dominio indicado y suficientes valores fraccionarios para determinar la forma de la curva.

10. $y = x^2$ desde $x = -3$ hasta $x = 3$.
11. $y = x^2 - 6x$ desde $x = -2$ hasta $x = 7$.
12. $y = 2x^2 - 5$ desde $x = -3$ hasta $x = 3$.
13. $y = -x^2 + 3x + 4$ desde $x = -2$ hasta $x = 5$.
14. $y = 3x^2 - 6x - 4$ desde $x = -1$ hasta $x = 3$.
15. $y = x^3$ desde $x = -3$ hasta $x = 3$.
16. $y = -x^3$ desde $x = -3$ hasta $x = 3$.
17. Trace la gráfica de la relación definida por $y = \pm 3\sqrt{x - 1}$ desde $x = 1$ hasta $x = 10$.
18. Trace la gráfica de la relación definida por $y = \pm \sqrt{x(5 - x)}$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$.
19. Las siguientes son lecturas de temperatura en grados Fahrenheit hechas cada hora desde las 8:00 a.m. hasta las 5:00 p.m.: 20°, 33°, 46°, 51°, 53°, 55°, 58°, 57°, 52°, 45°. Elija escalas convenientes a lo largo del eje horizontal (tiempo) y el eje vertical (temperatura) y localice los pun-

tos determinados por estos datos. Haga una gráfica conectando los puntos consecutivamente mediante segmentos de recta.

20. La tabla da el número de millas que rinde un galón de gasolina en un automóvil a diferentes velocidades en millas por hora. Localice los puntos que representan a estos datos. Trace una curva suave por estos puntos.

| $x$ (velocidad) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ (millas por galón) | 15 | 17.5 | 19 | 19.4 | 18.5 | 16 | 14 |

21. Se aplican los frenos de un automóvil y se mide la distancia recorrida por el automóvil hasta el reposo. Se repite este experimento a diferentes velocidades del automóvil. Las velocidades están medidas en millas por hora y las distancias en pies. Si los datos aparecen en la tabla que sigue construya una curva suave que represente la distancia de frenaje como función de la velocidad.

| $x$ (velocidad) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ (distancia) | 3 | 12 | 27 | 48 | 75 | 108 | 147 |

## 5-4. LA FORMULA DE LA DISTANCIA Y EL CIRCULO

La distancia entre dos puntos del plano de coordenadas, o la longitud del segmento lineal que los conecta, puede determinarse a partir de las coordenadas de los puntos. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ las coordenadas de dos puntos cualesquiera del plano. Entonces la recta por $P_1$ que sea paralela al eje de las $x$ y la recta por $P_2$ que es paralela al eje de las $y$ se cortan en un punto $P_3$ cuya abscisa es $x_2$ y ordenada $y_1$. Refiriéndose a la Fig. 5-8, o a la 5-9, expresamos las distancias entre $P_1$ y $P_3$ y entre $P_2$ y $P_3$, respectivamente, por medio de

$$P_1P_3 = |x_2 - x_1| \qquad \text{y} \qquad P_2P_3 = |y_2 - y_1|$$

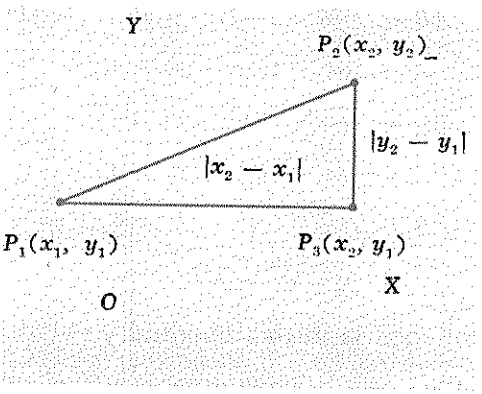



*Figura 5-8*

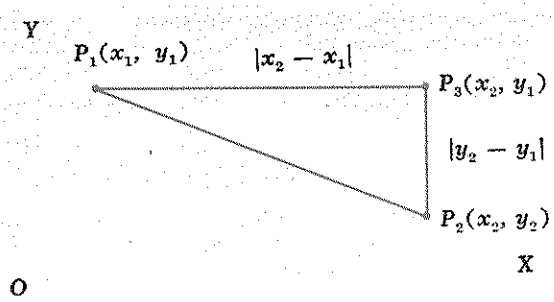



*Figura 5-9*

Designando la distancia entre $P_1$ y $P_2$ por $d$ y aplicando el teorema de Pitágoras (vea el Prob. 28, Ejercicio 5-3), tenemos

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

Finalmente, notando que $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ y $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$, expresamos la fórmula para la distancia entre dos puntos en la forma

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

Al aplicar esta fórmula, cualquiera de los puntos puede designarse con $(x_1, y_1)$ y el otro con $(x_2, y_2)$. Esto es así porque las dos diferencias involucradas están elevadas al cuadrado.

EJEMPLO 1. Encuentre las longitudes de los lados del triángulo (Fig. 5-10) con vértices en $A(-2, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(-2, 5)$.

*Solución.*

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{[6 - (-2)]^2 + [1 - (-3)]^2} \\ &= \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \\ BC &= \sqrt{(-2 - 6)^2 + (5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \\ CA &= \sqrt{[-2 - (-2)]^2 + (5 + 3)^2} \\ &= \sqrt{0 + 64} = 8 \end{aligned}$$

Dos de los lados tienen la misma longitud y el triángulo es isósceles.

La fórmula para la distancia tiene muchas aplicaciones importantes en las situaciones matemáticas. Aplicaremos ahora la fórmu-

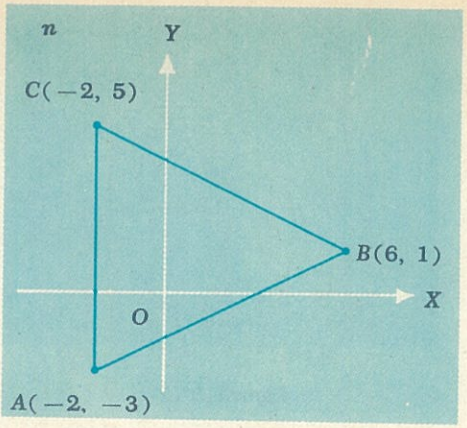



*Figura 5-10*

la para encontrar la ecuación del círculo. Recordamos, desde luego, que un círculo es el lugar de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo del plano. El punto fijo es llamado *centro*, y la distancia al centro, de un punto del círculo, se llama *radio*.

Si $C(h, k)$ son las coordenadas del centro de un círculo de radio $r$ (Fig. 5-11), entonces todo punto $P(x, y)$ del círculo debe satisfacer la condición.

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

o, elevado al cuadrado,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \tag{2}$$

La Ec. (2) es la ecuación general de un círculo. El círculo consiste en todos los puntos del plano, cuyas coordenadas satisfacen a

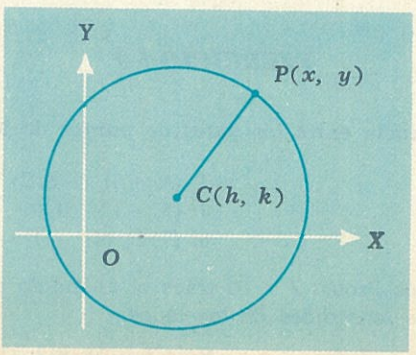



*Figura 5-11*

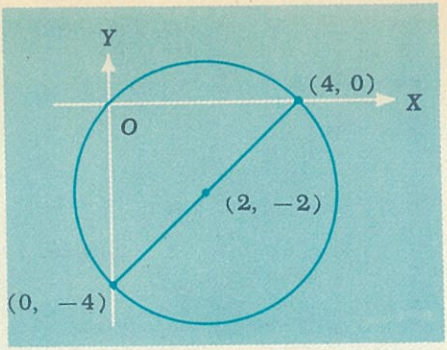



*Figura 5-12*

esa ecuación. En el caso especial en que el círculo está centrado en el origen y su radio es 1, la ecuación viene a ser

$$x^2 + y^2 = 1$$

Esta ecuación tiene aplicaciones importantes en trigonometría.

EJEMPLO 2. Encuentre la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(4,0)$, y $(0, -4)$.

*Solución.* Estos puntos son los vértices de un triángulo rectángulo (Fig. 5-12). Entonces, recordando que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo equidista de las tres vértices, vemos que $(2, -2)$ son las coordenadas del centro del círculo. La distancia de este punto a cada uno de los vértices es $\sqrt{8}$. Por lo tanto, tomando $r^2 = 8$ tenemos la ecuación

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$$

## *EJERCICIO 5-3*

Encuentre la distancia entre los pares de puntos de los Probs. 1 a 6.

1. $(3, 1), (7, 4)$
2. $(4, -3), (-8, 2)$
3. $(-3, -2), (0, 1)$
4. $(5, -12), (0, 0)$
5. $(-4, 0), (0, 3)$
6. $(7, 2), (4, -1)$

En cada uno de los Probs. 7 a 10 trace el triángulo que tiene los vértices dados y encuentre las longitudes de los lados.

7. $A(-1, 1), B(-1, 4), C(3, 4)$
8. $A(2, -1), B(4, 2), C(5, 0)$
9. $A(0, 0), B(5, -2), C(-3, 2)$
10. $A(0, -3), B(3, 0), C(0, -4)$

Determine, por la fórmula de la distancia, si los tres puntos en cada problema de 11 a 16 son los vértices de un triángulo escaleno (los tres lados desiguales), o un triángulo isósceles (dos ángulos iguales), o un triángulo rectángulo (vea el Prob. 28), o si los tres puntos están en una línea recta (la distancia entre dos de los puntos, igual a la suma de las otras distancias).

**11.** $A(6, 1)$, $B(2, -4)$, $C(-2, 1)$
**12.** $A(1, 4)$, $B(10, 6)$, $C(2, 2)$
**13.** $A(-2, 1)$, $B(5, -2)$, $C(3, 3)$
**14.** $A(1, -1)$, $B(1, -7)$, $C(8, 3)$
**15.** $A(2, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 0)$
**16.** $A(3, 2)$, $B(0, 0)$, $C(9, 6)$

En los Probs. 17 a 27 escriba la ecuación del círculo que satisface las condiciones dadas.

**17.** Centro $(-6, 2)$, radio 5.
**18.** Centro $(4, 3)$, radio 5.
**19.** Centro $(0, 0)$, radio 6.
**20.** Centro $(-4, -3)$, radio 7.
**21.** El segmento subtendido por $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$ es un diámetro.
**22.** El segmento subtendido por $A(2, 3)$ y $B(2, -3)$ es un diámetro.
**23.** El centro se encuentra en $(2, 4)$ y el círculo pasa por $(-1, -1)$.
**24.** El centro está en $(1, -3)$ y el círculo pasa por $(-3, 5)$.
**25.** El círculo es tangente al eje $x$ y el centro está en $(-4, 1)$.
**26.** El círculo pasa por los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$, y $(0, 2)$.
**27.** El círculo pasa por los puntos $(1, 1)$, $(5, 1)$, y $(1, 5)$.
**28.** El teorema de Pitágoras afirma que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados. Use la Fig. 5-13 para demostrar que $c^2 = a^2 + b^2$. Sugerencia: El área del cuadrado mayor es dada por

$$A = (a + b)^2 \text{ y también por } A = c^2 + 4(\tfrac{1}{2}ab)$$

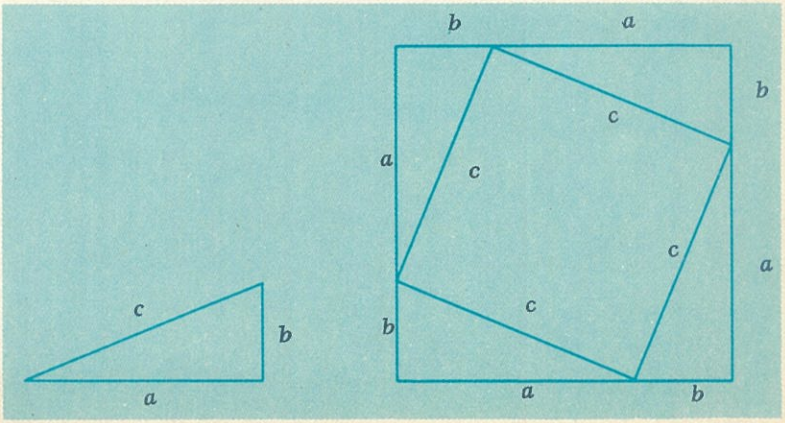



*Figura 5-13*

Capítulo 6

# ECUACIONES LINEALES

## 6-1 ECUACIONES CONDICIONALES E IDENTIDADES

El enunciado en que dos cantidades son iguales es llamado una *ecuación*. La manera acostumbrada de escribir una ecuación es la de colocar el símbolo = (léase "es igual a") entre las dos cantidades iguales. Una ecuación tiene, entonces, dos miembros, el izquierdo y el derecho. Las ecuaciones comprenden usualmente una o más letras que son vistas como *variables* o *incógnitas*. Los números que al sustituir a las variables hacen iguales a los dos miembros de la ecuación se dice que *satisfacen a*, o que son una *solución de*, la ecuación. La totalidad de las soluciones es llamada el *conjunto de soluciones*.

EJEMPLOS

$$x - 3 = 4 \tag{1}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \tag{2}$$

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \tag{3}$$

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x - 1)} \tag{4}$$

La primera ecuación se satisface cuando $x = 7$ y para ningún otro número. La segunda ecuación se satisface para $x = -3$ y $x = 5$; cualquier otro valor de $x$ hace desiguales a los dos miembros de la ecuación. El miembro derecho de la Ec. (3) es el resultado de la operación indicada en el lado izquierdo. Claramente, entonces, la ecuación se satisface si $x$ es reemplazado por cualquier número real. El miembro derecho de la Ec. (4) es la suma de las fracciones del miembro izquierdo, y la ecuación es válida para todos los valores de $x$, excepto $x = 0$ y $x = 1$. Cualquiera de estos valores produce un cero en un denominador a la izquierda y el denominador a la derecha. Consecuentemente, decimos que cada miembro de la ecuación es *indefinido* para estos valores de $x$.

Los dos tipos de ecuaciones que hemos ilustrado se nombran de acuerdo con las siguientes definiciones.

**Definición 6-1.** Una ecuación que se satisface con algunos, pero no todos, valores posibles de las variables para los que están definidos los miembros de la ecuación es llamado una *ecuación condicional.*

**Definición 6-2.** Una ecuación que se satisface para todos los valores de las variables para los que están definidos ambos miembros de la ecuación es llamada una *identidad.*

De acuerdo con estas definiciones, las Ecs. (1) y (2) son ecuaciones condicionales, y las Ecs. (3) y (4) son identidades. Los conjuntos de soluciones de las cuatro ecuaciones son, respectivamente,

$$\{7\}, \qquad \{-3, 5\}, \qquad \{x | x \in R\}, \qquad \{x | x \in R, x \neq 0 \text{ or } 1\}$$

En el Cap. 4 tratamos principalmente acerca de identidades. Ahora, sin embargo, deseamos considerar ecuaciones condicionales tan sólo con una variable. Una solución de una ecuación en una variable es llamada una *raíz* de la ecuación. Resolver la ecuación significa encontrar todas sus raíces. Antes de resolver las ecuaciones discutimos ciertas operaciones realizables con las ecuaciones.

## 6-2. OPERACIONES CON ECUACIONES

Dos ecuaciones son llamadas *equivalentes* si sus conjuntos de soluciones son los mismos. Las ecuaciones $x - 3 = 2$ y $x + 1 = 6$, por ejemplo, son equivalentes; cada una tiene como raíz 5. Ninguna de estas ecuaciones, sin embargo, es equivalente a $(x - 5)(x - 1) = 0$. Los valores $x = 1$ y $x = 5$ satisfacen a la última ecuación. Pero $x = 1$ no satisface a las primeras ecuaciones

En el proceso de encontrar las soluciones de una ecuación es usualmente necesario realizar operaciones, empezando con las ecuaciones dadas, que conducen a otras. Es importante, por lo tanto, conocer si las nuevas ecuaciones son equivalentes a la original. Con relación a esta pregunta, tenemos los siguientes teoremas.

**Teorema 6-1.** Si se suman el mismo número o el mismo polinomio, o se resta el mismo número o el mismo polinomio de ambos miembros de una ecuación condicional, se obtiene una ecuación equivalente.

*Demostración.* Supóngase que reemplazamos las variables de una ecuación por números que constituyen una solución de la ecuación. Entonces los miembros de la ecuación se igualan a un número $a$.

La misma solución hará igual a $c$ al polinomio que ha sido sumado a ambos miembros de la ecuación. Así, reducimos la primera ecuación a $a = a$, y la segunda a $a + c = a + c$. Por tanto, vemos que una solución de la ecuación original es, además, una solución de la nueva ecuación. Empezando ahora con una solución de la nueva ecuación y haciendo sustituciones de las variables, obtenemos una ecuación de la forma $d + e = f + e$, donde $e$ es el valor que toma el polinomio y $d$ y $f$ son los valores que toman los miembros de las ecuaciones originales. De esta ecuación vemos que $d = f$ (Teorema 2-20) y, consecuentemente, una solución de la nueva ecuación es una solución de la ecuación original. Puesto que una solución de una ecuación original es una solución de la nueva ecuación y una solución de la nueva ecuación es una solución de la ecuación original, concluimos que las ecuaciones son equivalentes. ■

**Teorema 6-2.** Si ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por la misma constante no nula, se obtiene una ecuación equivalente.

Dejamos la demostración de este teorema al estudiante.

Si ambos miembros de una ecuación se multiplican o se dividen por una expresión que contiene una variable, la ecuación resultante no será en ciertos casos equivalente a la original. Así, por ejemplo, multiplicando ambos miembros de $4x - 8 = 12$ por $x$ tendremos $4x^2 - 8x = 12x$. La nueva ecuación se satisface para $x = 5$ y para $x = 0$; mientras que la primera ecuación se satisface para $x = 5$, pero no para $x = 0$. Recíprocamente, si empezamos con $4x^2 - 5x = 12x$ y dividimos por $x$, se pierde una raíz en vez de ganarla. Observe, sin embargo, que cada una de estas operaciones, que resulta en una ecuación no equivalente, involucra a una variable.

Una raíz de una ecuación derivada que no es una raíz de la ecuación original es llamada una *raíz extraña*. Esta puede ser detectada sustituyendo las soluciones de la ecuación derivada en la ecuación dada. Una operación que conduce a una ecuación con menos raíces que la ecuación original debiera ser evitada si se desean todas las raíces.

## 6-3. ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE

En esta sección resolveremos ecuaciones de la forma, o que son reducibles a la forma.

$$ax + b = 0$$

donde $b$ representa a cualquier número y $a$ a cualquier número distinto de cero. Esta ecuación es de primer grado en $x$ y es llamada una *ecuación lineal.*

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación $4x + 10 = 1 - 2x$.

*Solución.*

$$\begin{aligned} 4x + 10 &= 1 - 2x && \text{ecuación dada} \\ 4x + 10 + 2x - 10 &= 1 - 2x + 2x - 10 && \text{sumando } 2x - 10 \\ 6x &= -9 && \text{reuniendo términos} \\ x &= -1.5 && \text{dividiendo por } 6 \end{aligned}$$

*Verificación.* Sustituimos $-1.5$ por $x$ en cada miembro de la ecuación dada y encontramos

$$\begin{aligned} 4(-1.5) + 10 &= -6 + 10 = 4 && \text{para el miembro izquierdo} \\ 1 - 2(-1.5) &= 1 + 3 = 4 && \text{para el miembro derecho} \end{aligned}$$

El valor $x = -1.5$ es una raíz porque hace a ambos miembros de la ecuación, iguales.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación $3x + 4 = 2ax + 5c$ para $x$.

*Solución.*

$$\begin{aligned} 3x + 4 - 2ax - 4 &= 2ax + 5c - 2ax - 4 && \text{sumando } -2ax - 4 \\ 3x - 2ax &= 5c - 4 && \text{reuniendo términos} \\ (3 - 2a)x &= 5c - 4 && \text{factorizando} \\ x &= \frac{5c - 4}{3 - 2a} && \text{dividiendo por } 3 - 2a \end{aligned}$$

Este resultado puede verificarse sustituyendo en la ecuación dada.

Una ecuación que tiene fracciones simples puede reducirse a una forma no fraccional multiplicando ambos miembros por el M.C.M. de los denominadores. Este proceso es llamado *eliminando fracciones*. Si ninguno de los denominadores contiene a la variable la nueva ecuación es equivalente a la original. Sin embargo, si la variable aparece en cualquier denominador, la nueva ecuación puede tener raíces además de las de la ecuación original. Es esencial, por tanto, que todas las raíces de la nueva ecuación se verifiquen en la ecuación dada.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación $1/(x - 3) + 1 = 1/(x - 3)$.

*Solución.* Multiplicando ambos miembros por $x - 3$, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + x - 3 &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Pero 3 no es una raíz de la ecuación dada, porque este valor hace al denominador igual a cero. De hecho, la ecuación no tiene solución puesto que el miembro izquierdo excede al miembro derecho en una unidad para todos los valores permisibles de $x$.*

EJEMPLO 4. Resolvamos la ecuación

$$\frac{x-1}{2x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{2-x^2}{2x^2+x-1}$$

*Solución.* Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(2x-1)(x+1)$, el M.C.M. de los denominadores, tenemos

$$(x-1)(x+1) - x(2x-1) = 2 - x^2$$

$$x^2 - 1 - 2x^2 + x = 2 - x^2 \qquad \text{simplificando}$$

$$x = 3 \qquad \text{Sumando } x^2 + 1$$

*Verificación.*

$$\frac{3-1}{6-1} - \frac{3}{3+1} = \frac{-7}{20} \qquad \text{para el miembro izquierdo}$$

$$\frac{2-9}{18+3-1} = \frac{-7}{20} \qquad \text{para el miembro derecho}$$

## *EJERCICIO 6-1*

**Resuelva cada ecuación para $x$, desechando como raíz a cualquier número que anule a un denominador.**

1. $5x - 4 = 3x - 6$
2. $x - 5 = 5x + 11$
3. $3(4 - 5x) - 2(x + 4) = 4$
4. $2(x - 7) + 5(3 + 2x) + 6 = 0$
5. $4x + 13 = 3(5x + 20) + 8$
6. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x + 9$
7. $(3x - 1)(x + 1) = 3x^2$
8. $(x + 4)(x - 1) = (x + 2)(x - 3)$
9. $x(10 - 3a) = 4 + 2b$
10. $3 - ax + 4x - 36 = 0$
11. $2(x - a) - 5 = 3(ax - 4)$
12. $5x - a = 2ax + 7$
13. $\dfrac{3x+4}{4} - \dfrac{5x}{8} = \dfrac{2x+4}{6}$
14. $\dfrac{x}{7} + \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2x+1}{21} - \dfrac{1}{3}$
15. $\dfrac{2x+7}{4} + \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{x+1}{6}$
16. $\dfrac{3-4x}{5} = \dfrac{4-3x}{4} - \dfrac{5-2x}{2}$
17. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{11}{10}$
18. $\dfrac{5}{7x} - \dfrac{7}{2x} - 3 = \dfrac{3}{14}$
19. $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$
20. $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{4}{x^2-1}$

* Los valores permisibles de las variables en una ecuación son todos los valores de variables para los cuales los miembros de la ecuación están definidos.

21. $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}$

22. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{2}{x-1}$

23. $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+4}{x+5}=\dfrac{3x+5}{x^2+5x}$

24. $\dfrac{1}{2x+a}+\dfrac{2}{3x}=\dfrac{7}{6x+3a}$

## 6-4. PROBLEMAS EN PALABRAS

Las ecuaciones del Ejercicio 6-1 son lineales o pueden ser expresadas linealmente eliminando fracciones. Consideramos ahora problemas en palabras que conducen a ecuaciones del mismo tipo. La ecuación en cada problema debe ser encontrada a partir de las relaciones descritas entre los números conocidos y los números desconocidos. Hacemos las siguientes sugerencias para atacar tales problemas

1. Lea y relea el problema hasta que capte con claridad lo que se dice, hasta que tenga bien presentes en la mente los números dados y los números desconocidos (números por encontrar).
2. Exprese cada número desconocido en términos de una sola letra.
3. Encuentre las cantidades, que comprenden a los números dados y los números desconocidos, que son iguales. Forme entonces una ecuación.
4. Resuelva la ecuación y verifique el resultado.

EJEMPLO 1. La longitud de un rectángulo excede a su anchura por 2 pies. Si cada dimensión fuese incrementada en 3 pies, el área se incrementaría en 51 pies$^2$. Encontremos la dimensiones originales

*Solución.* Si las dimensiones originales son $x$ pies por $x+2$ pies, entonces $x+3$ pies por $x+5$ pies son las nuevas dimensiones. Puesto que el área se incrementa en 51 pies$^2$, debemos tener

$$\begin{aligned}(x+3)(x+5)-x(x+2)&=51\\ x^2+8x+15-x^2-2x&=51\\ 6x&=36\\ x&=6\end{aligned}$$

Las dimensiones originales son 6 y 8 pies y las nuevas son 9 por 11 pies. La áreas, entonces, son 48 pies$^2$ y 99 pies$^2$, que tienen una diferencia de 51 pies$^2$.

EJEMPLO 2. La persona A puede hacer cierto trabajo en 8 hr, la persona B en 10 hr, y la persona C en 12 hr. ¿Cuánto tiempo tomará efectuar el trabajo si A y B se ponen a trabajar durante 1 hr y A y C terminan después?

*Solución.* Las partes del trabajo que realizan en una hora A, B y C son 1/8, 1/10 y 1/12, respectivamente. La contribución de cada trabajador es la parte que hace en una hora multiplicada por el número de horas que trabaja. Si designamos con $x$ el número total de horas requeridas para hacer el trabajo, entonces A trabaja $x$ horas, B trabaja 1 hr y C trabaja $x - 1$ hr. Por tanto,

$$\frac{x}{8} = \text{parte del trabajo hecho por A}$$

$$\frac{1}{10} = \text{parte del trabajo hecho por B}$$

$$\frac{x-1}{12} = \text{parte del trabajo hecho por C}$$

El trabajo total se completa sumando estas partes y, por tanto,

$$\frac{x}{8} + \frac{1}{10} - \frac{x-1}{12} = 1$$

$$15x + 12 + 10x - 10 = 120 \quad \text{multiplicando por 120, el M.C.M.}$$

$$25x = 118 \quad \text{combinando términos}$$

$$x = 4\tfrac{18}{25}$$

Por tanto, el tiempo requerido es $4\frac{18}{25}$ hr.

EJEMPLO 3. ¿Cuántas onzas de plata pura debemos agregar a 100 oz, de una pureza del 40%, para obtener una mezcla que tenga una pureza del 65%?

*Solución.* La ecuación debe establecerse observando que la cantidad de plata en las dos partes separadas es la cantidad de plata que hay en la mezcla. Representando con $x$ al número de onzas de plata que han de agregarse, arreglamos la información de la siguiente manera:

| $x$ oz | y | 100 oz | da | $(100 + x)$ oz |
|---|---|---|---|---|
| 100% puro | | 40% puro | | 65% puro |
| $x$ oz de plata | | 40 oz de plata | | $.65(100 + x)$oz de plata |

Puesto que las 40 oz originales de plata y las $x$ onzas adicionales constituyen la totalidad de la plata en la mezcla, tenemos

$$x + 40 = .65(100 + x)$$
$$.35x = 25$$
$$x = 71\tfrac{3}{7} \text{ oz}$$

*Verificación.*

$$71\tfrac{3}{7} + 40 = 111\tfrac{3}{7} \quad \text{y} \quad .65(171\tfrac{3}{7}) = 111\tfrac{3}{7}$$

## *EJERCICIO 6-2*

1. La suma de tres números es 138. El segundo es 5 unidades mayor que el menor y el tercero es 10 mayor que el menor. Encuentre los números.
2. Tres números están relacionados de tal modo que el segundo es 2 unidades mayor que el primer número y el tercero es 4 unidades mayor que el primero. Encuentre los números si la suma de sus cuadrados es 56 unidades mayor que tres veces el cuadrado del número menor.
3. La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 6 unidades. Si cada dimensión fuese incrementada en 3 unidades, el área sería incrementada en 57 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones del rectángulo.
4. La altura de un triángulo es $\frac{3}{4}$ la longitud de su base. Si la altura se incrementara en 3 pies y la base se disminuyera en 3 pies, el área quedaría inalterada. Encuentre la longitud de la base y la altura.
5. La persona A puede pintar una casa en 10 días y la persona B puede pintar una casa en 12 días. ¿Cuánto tiempo tomaría pintar la casa trabajando los dos hombres conjuntamente?
6. Un hombre puede hacer cierto trabajo en 21 hr, otro hombre puede hacer el trabajo en 28 hr, y un muchacho puede hacer el trabajo en 48 hr. Encuentre cuánto tiempo se necesitaría para hacer el trabajo si los tres trabajaran juntos.
7. Una persona A puede hacer cierto trabajo en 4 hr, B puede hacer la tarea en 6 hr, y C puede hacer la tarea en 8 hr. ¿Cuánto tiempo llevaría hacer la tarea si A y B trabajan 1 hr y después B y C terminan el trabajo?
8. Un tanque puede llenarse con un tubo en 9 hr y con otro tubo en 12 hr. Si el tanque está vacío al empezar, ¿en cuánto tiempo se llenará el tanque de agua si está saliendo el agua por un tercer tubo a una razón de $\frac{1}{6}$ de la capacidad del tanque por hora?
9. ¿Cuántas onzas de plata pura deben ser agregadas a 18 oz de una pureza del 60%, para hacer una aleación que es plata pura en un 76%?
10. Se desea mezclar un perfume que cuesta \$4.10 por onza con un perfume que cuesta \$2.50 por onza para obtener una mezcla de 40 oz que vale \$3.00 por onza. ¿Cuánto perfume de \$4.10 deberá usarse?
11. Una aleación de plata y oro pesa 15 oz en el aire y 14 oz en el agua. Suponiendo que la plata pierde $\frac{1}{10}$ de su peso en el agua y el oro $\frac{1}{19}$, ¿cuántas onzas de cada metal hay en la aleación?
12. El denominador de una fracción excede a su numerador en dos unidades. Si 1 se suma al numerador y 2 se sustrae del denominador, la suma de la fracción original y la nueva fracción es igual a 2. Encuentre la fracción original.

Sumando, tenemos

$$11x + 4z = 23$$

Ahora tenemos las ecuaciones $5x + z = 8$ y $11x + 4z = 23$. La solución de estas ecuaciones es $x = 1$, $z = 3$. Sustituyendo estos valores para $x$ y $z$ en cualquiera de las ecuaciones dadas obtenemos $y = -2$. Por tanto, la solución del sistema dado es $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$. Estos valores satisfacen cada una de las ecuaciones dadas.

Los siguientes pasos pueden ser empleados para resolver un sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas.

1. Elegir una pareja de ecuaciones de las tres que se han dado y eliminar una de las incógnitas.
2. Elegir una de la misma pareja de ecuaciones junto con la ecuación todavía no usada y eliminar la misma incógnita.
3. Resolver las ecuaciones que resultan de los pasos 1 y 2 y que son ecuaciones en dos incógnitas.
4. Sustituir estos valores en una de las ecuaciones dadas y obtener la siguiente incógnita.

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos incógnitas, hemos realizado operaciones que conducen a un nuevo sistema en el cual cada incógnita es igual a una constante. Y en el ejemplo de arriba obtuvimos ecuaciones con cada una de las tres incógnitas iguales a una constante. En cada caso la operación clave es la de reemplazar una ecuación por una nueva. El nuevo sistema resultante de ecuaciones es equivalente al sistema original, como mostraremos ahora.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \qquad a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \qquad a_2 \neq 0, \quad b_2 \neq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

y el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ k_1(a_1x + b_1y) + k_2(a_2x + b_2y) &= k_1c_1 + k_2c_2 \end{aligned} \tag{2}$$

donde $k_1$ y $k_2$ son constantes no nulas. Claramente cualquier solución del sistema (1) es una solución del sistema (2). Supongamos ahora que una pareja de números $(x', y')$ es una solución del sistema (2). Entonces podemos expresar la segunda ecuación como

$$k_1c_1 + k_2(a_2x' + b_2y') = k_1c_1 + k_2c_2$$

que podemos reducir a

$$a_2x' + b_2y' = c_2$$

Por tanto, $(x', y')$ es una solución del sistema (1). Puesto que una solución del sistema (1) es una solución del sistema (2) y una solución del sistema (2) es una solución del sistema (1), concluimos que los dos sistemas son equivalentes.

Al resolver un sistema de la forma (1), elegimos valores para $k_1$ y $k_2$, de modo que $k_1a_1 + k_2a_2 = 0$ o $k_1b_1 + k_2b_2 = 0$, eliminando así una de las incógnitas. Notamos que el razonamiento que hemos usado en el establecimiento de la equivalencia de los sistemas (1) y (2) es aplicable al caso de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas.

### *EJERCICIO 6-4*

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones para $x$, $y$ y $z$ o $u$, $v$ y $w$. Verifique sus resultados.

**1.** $3x - 4y - z = 1$
$x - y + 3z = 3$
$3x - 2y + 2z = 0$

**2.** $2x - y + 3z = 9$
$3x + y + 2z = 11$
$x - y + z = 2$

**3.** $4u + v + 2w = 10$
$3u + 2v + w = 5$
$2u + 3v + 2w = 10$

**4.** $3u + v + 3w = 9$
$4u + v + 2w = 13$
$7u + 2v - w = 24$

**5.** $4x + 2y + 3z = 3$
$3x - 6y + 4z = 3$
$x + 2y + z = 1$

**6.** $2x - 3y - 4z = 8$
$3x - 2y - 3z = 8$
$4x + 4y + 2z = 6$

**7.** $3x - 2y + 5z = 28$
$4x + 5y + 4z = 9$
$5x - 4y - 3z = 26$

**8.** $5x - 7y - 9z = 14$
$7x + 3y - 4z = 11$
$3x + 4y + 8z = -5$

**9.** $5x + 4y - 3z = 3$
$4x - 2y + 2z = -1$
$6x - 4y + 2z = -1$

**10.** $u + v + w = 2a$
$u - v + w = 2b$
$u + v - w = 2c$

**11.** $u + 2v - w = a - b$
$2u - v + w = 3a + 3b$
$-u + v + 2w = 4a - 2b$

**12.** $ax + by - cz = 6$
$ax - by - cz = 8$
$ax - by - cz = 0$

**13.** $u - v = 1$
$u + w = -1$
$v - w = 6$

**14.** $2u + 3v = 2$
$u + 2w = 1$
$3v + 8w = 3$

**15.** $ax - by = 2$
$ax - 2cz = 3$
$by + 3cz = -2$

**16.** $4u - 9v = 4$
$u - 6w = 4$
$3v - 4w = 1$

**17.** $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{3}$
$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = \frac{5}{3}$
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 3$

**18.** $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 4$
$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} - \frac{4}{z} = 0$
$\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 1$

## 6-8. PROBLEMAS EN PALABRAS QUE CONDUCEN A SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Hay muchos tipos de problemas verbales que comprenden dos o más incógnitas y que pueden resolverse estableciendo un sistema de

ecuaciones lineales a partir de los datos conocidos. El razonamiento mediante el cual obtenemos las ecuaciones es muy análogo a aquel que nos conduce a las ecuaciones de una incógnita en la Sec. 6-4.

EJEMPLO. A y B pueden hacer un cierto trabajo en 9 días; A y C pueden hacerlo en 8 días; y B y C pueden hacerlo en 12 días. Encontrar cuánto tiempo requiere cada una de estas personas para realizar el mismo trabajo.

*Solución.* Sean $x$, $y$ y $z$ los días requeridos por A, B y C, respectivamente, trabajando cada uno por su parte. Tenemos entonces que $1/x$, $1/y$ y $1/z$ son la parte terminada del trabajo en un día por A, B y C trabajando solos, respectivamente. Tenemos, por tanto, las siguientes igualdades

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$$

Estas ecuaciones, aunque no son lineales en $x$, $y$ y $z$, son lineales en $1/x$, $1/y$ y $1/z$. Las ecuaciones nos dan los resultados

$$x = 13\frac{1}{11} \text{ días}; \quad y = 28\frac{4}{5} \text{ días}; \quad z = 20\frac{4}{7} \text{ días}:$$

## *EJERCICIO 6-5*

Encuentre la solución de cada uno de los siguientes problemas estableciendo previamente un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas.

1. La diferencia de dos números es 14 y el duplo del menor de los números es 5 unidades menor que el mayor de los números. Encuentre los números.
2. Un ganadero ha vendido 60 terneras y 240 ovejas a un comprador por \$17 160, y con los mismos precios ha vendido 40 terneras y 180 ovejas por \$12 240. Encuentre los precios por cabeza de cada una de las especies de animales vendidos.
3. Un comerciante tiene \$36 en monedas de 10 y 25 cts. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay si el número total de monedas es 192?
4. Si el numerador y el denominador de una cierta fracción se disminuyen en dos, el valor de la nueva fracción es $\frac{1}{2}$. Pero si el numerador de la fracción original se incrementa en 2 y el denominador se disminuye en 2, la fracción resultante es igual a $\frac{3}{4}$. Encuentre la fracción original.

5. Un hombre tiene dos inversiones, una que le deja anualmente un interés de 3% y otra de 4%. El ingreso anual total causado por las inversiones es \$170. Si se intercambiaran las razones de interés, el interés total anual sería de \$180. Encuentre el monto de cada inversión.
6. Si la longitud de cierto rectángulo fuese incrementada en dos pies y su anchura fuese disminuida en 1 pie, el área sería disminuida en 2 pies$^2$. Si la longitud fuese incrementada en 2 pies y la anchura en 2 pies, el área sería incrementada en 16 pies$^2$. Encuentre las dimensiones del rectángulo.
7. Las personas A y B pueden pintar una casa si A trabaja 6 días y B trabaja 12 días, o pueden pintar la casa si A trabaja 9 días y B trabaja 8 días. ¿Cuánto tiempo tardaría cada trabajador en pintar la casa él solo?
8. Un hombre y un muchacho realizan un trabajo en 2 días. Completarán la mitad del trabajo en el primer día si el hombre trabaja 8 hr y el muchacho 10 hr. Al día siguiente terminaron el trabajo habiendo trabajado el hombre 4 hr y el muchacho 15 hr. Encuentre cuántas horas tardaría cada uno de ellos trabajando él solo para realizar el trabajo.
9. La suma de los recíprocos de dos números es 11. El triple del recíproco de uno de los números es 3 más que el doble del recíproco del otro número. Encuentre los números.
10. Un cierto número de dos dígitos es igual a 9 veces la suma de sus dígitos. Si se restaran 63 unidades del número, los dígitos se invertirían. Encuentre el número.
    [Sugestión: Si $x$ es el dígito de las decenas y $y$ el de las unidades, el valor del número es $10x + y$.]
11. Un aeroplano viaja 360 mi (millas), a favor del viento, en 1 hr y 20 min y retorna contra el viento en 2 hr y 15 min. Encuentre la rapidez del aeroplano en aire tranquilo y la rapidez del viento.
12. Una embarcación viaja 6 mi a favor de la corriente en un río en 30 min y tarda en volver 45 min, contra la corriente, naturalmente. Encuentre la velocidad de la embarcación en agua tranquila y la rapidez de la corriente.
13. Un hombre rema 12 mi contra la corriente en un río y regresa tardando en el viaje $7\frac{1}{2}$ hr. El puede remar 1 mi contra la corriente en el tiempo en que rema 4 mi a favor de la corriente. Encuentre la rapidez de su lancha en agua tranquila y la rapidez de la corriente.
14. Un trabajador ha sido empleado para entrar a trabajar por un salario de \$15 pagando \$2 diariamente por las comidas. Algunos días el trabajador ha permanecido ocioso sin recibir paga, pero ha tenido que pagar la comida de cada día. Su paga neta al final del periodo es de \$382. Si su salario diario hubiese sido \$18 y el costo de la comida \$3 diariamente, el pago neto hubiese sido \$438. ¿Cuántos días trabajó y cuántos días faltó el hombre a su trabajo?

Encuentre la solución de cada uno de los siguientes problemas, estableciendo previamente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

15. La suma de tres ángulos de un triángulo es 180°. La suma de dos de los ángulos es igual a un tercio del tercer ángulo y la diferencia de los dos ángulos es igual a $\frac{2}{3}$ del tercer ángulo. Encuentre los ángulos.

16. Encuentre tres números tales que la suma del primero y segundo es 67, la suma del primero y tercero es 80, y la suma del segundo y el tercero es 91.
17. Para disponer del cambio suficiente en un día de negocios, un comerciante adquiere \$75 en monedas de medio dólar, un cuarto de dólar, diez y cinco centavos. Adquiere en total 360 monedas y el número de monedas de medio dólar es el mismo que el número de monedas de un cuarto de dólar, y el número de monedas de diez centavos es igual que el número de monedas de cinco centavos. Encuentre el número de monedas de cada denominación.
18. A y B trabajando conjuntamente pueden realizar un trabajo en 6 días. A y C pueden hacer el trabajo en 8 días. B y C pueden hacer el trabajo en 9 días. Encuentre qué tanto tiempo toma cada hombre trabajando por sí mismo para hacer el trabajo.
19. A, B y C, trabajando conjuntamente, realizan una tarea en 6 hr. A y B pueden realizarla en 9 hr, y B y C pueden realizarla en 12 hr. ¿Cuánto tiempo tardará en realizar la misma tarea cada uno de los hombres trabajando solo?
20. Un hombre realiza tres inversiones de un total de \$24 000 con razones de interés de 6%, 7% y 8% anual. El ingreso total anual es de \$720 y el ingreso de la inversión al 7% es \$40 menos que el ingreso combinado de las otras dos inversiones. Encuentre el monto total de cada inversión.
21. La suma del segundo y tercer dígitos de un número de tres dígitos es igual al primer dígito. La suma del primer dígito y el segundo es 2 más que el tercer dígito. Si el segundo y tercer dígitos fueran intercambiados, el nuevo número debería ser 54 más que el número original. Encuentre el número.
22. La suma de los dígitos de un número de tres dígitos es 18. Si el segundo y tercer dígitos se intercambiaran, el número debería incrementarse en 36. Si el primer y tercer dígitos se intercambiaran, el nuevo número debería ser 99 menos que el número original. Encuentre el número.
23. A, B y C completan un trabajo en 3 días. El primer día ellos hacen $\frac{1}{3}$ del trabajo con A trabajando 10 hr, B trabajando 4 hr, y C trabajando 10 hr. El segundo día hacen la $\frac{1}{4}$ parte del trabajo con A trabajando 4 hr, B trabajando 6 hr y C trabajando 9 hr. Ellos terminan el trabajo el tercer día con A trabajando 7 hr, B trabajando 12 hr, y C trabajando 12 hr. Encuentre el número de horas que tardaría cada uno en hacer el trabajo.

## 6-9. RAZON Y PROPORCION

Dos números pueden ser comparados en magnitud dividiendo el uno por el otro. El cociente es llamado la *razón* de un número al otro. Si $x$ y $y$ ($\neq 0$) representan a los números, la razón de $x$ a $y$ puede ser expresada en cualquiera de las formas

$$x/y, \qquad x \div y, \qquad x:y$$

La forma fraccionaria es usualmente preferible cuando han de ser realizadas operaciones algebraicas. La forma $x:y$ (léase "$x$ es a $y$") emplea el símbolo "dos puntos" para indicar división.

Dos cantidades pueden ser comparadas expresándolas previamente en términos de la misma unidad de medida. Por ejemplo, la razón de 16 hr a tres días es

$$\frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

Por tanto, la razón de 16 hr a 3 días es 2 a 9. Se comunica la misma información diciendo que la razón de 3 días a 16 hr es 9 a 2.

Un enunciado de igualdad de dos razones es llamado una *proporción*. Una proporción puede ser expresada en cualquiera de las formas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad a \div b = c \div d, \qquad a:b = c:d$$

La forma $a:b = c:d$ es leída "$a$ es a $b$ como $c$ es a $d$". Los números $a$ y $d$ son llamados los *extremos* y $b$ y $c$ los *medios* de la proporción. El número $d$ es llamado el cuarto proporcional a $a$, $b$ y $c$. Si los medios son iguales ($b = c$), la proporción se transforma en

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

En este caso especial $b$ es llamado la media proporcional a $a$ y $d$, y $d$ es el *tercer proporcional* a $a$ y $b$.

Los siguientes teoremas ocurren en geometría plana elemental. El estudiante deberá realizar las demostraciones. Los valores de $a$, $b$, $c$ y $d$ son supuestos tales que ninguno de los denominadores es igual a cero.

**Teorema 6-3** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$.

**Teorema 6-4.** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

**Teorema 6-5.** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

**Teorema 6-6.** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

**Teorema 6-7.** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

**Teorema 6-8.** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

Sugestiones: Para demostrar el Teorema 6-4, divida ambos miembros de $ad = bc$ por $cd$. Para demostrar el Teorema 6-6 sume 1 a ambos miembros de la proporción dada. El Teorema 6-8 puede obtenerse rápidamente de los Teoremas 6-6 y 6-7.

EJEMPLO 1. Encontremos el tercer proporcional a 8 y 14.

*Solución.* Para formar la proporción, observemos que cada una de las medias es 14. Si $x$ representa entonces al tercer proporcional, tenemos

$$8:14 = 14:x \quad \text{o} \quad \frac{8}{14} = \frac{14}{x}$$

por tanto, eliminando fracciones, $8x = 196$ y $x = 24.5$.

EJEMPLO 2. Un triángulo tiene lados de longitudes 12, 17 y 22 plg. Si la longitud del lado más corto de un triángulo semejante es 8 plg, encuentre la longitud del lado más largo.

*Solución.* Recordamos que los lados correspondientes de figuras similares son proporcionales. Por tanto, si $x$ denota la longitud del lado más largo, tenemos

$$\frac{x}{22} = \frac{8}{12}$$

$$12x = 176$$

$$x = 14\tfrac{2}{3} \text{ plg}$$

Hay veces en que expresamos las magnitudes relativas de tres números en la forma de una razón. Supongamos, por ejemplo, que la razón de $x$ a $y$ es 2 a 5 y que la razón de $y$ a $z$ es 5 a 7. Entonces decimos que $x$ es a $y$ es a $z$ como 2 es a 5 es a 7, y escribimos

$$x:y:z = 2:5:7$$

## *EJERCICIO 6-6*

Exprese cada razón como una fracción en términos mínimos.

1. 3 pies a 9 plg
2. 15¢ a $1.05
3. 9 hr a 3 días
4. 72 plg² a 2 pies²

Encuentre la cuarta proporcional a cada conjunto de números, y la tercera proporcional a los dos primeros números.

5. 4, 3, 6 6. $-2, 6, 5$ 7. $-3, 11, -9$

Encuentre la incógnita (o incógnitas) en cada problema.

8. $4:b = 2:5$ 9. $9:7 = 6:x$ 10. $x:4 = 9:x$
11. $(2a - 1):(a + 1) = (a - 4):(2a + 3)$ 12. $(3x + 2):(6x - 2) = (x - 2):(2x - 3)$
13. $x:y:2 = 2\ 3:5$ 14. $a:3:b = -2\ 3:-4$

15. Dos edificios de una escuela distan 7 plg en el mapa de una ciudad. Si la escala del mapa es 4 plg por 3 mi, encuentre la distancia entre los edificios.
16. Divida 72 en dos partes que tengan la razón 4:5.
17. Los lados de un cuadrilátero son 6, 7, 9 y 10 plg de longitud. El lado más largo de un cuadrilátero similar es 8 plg. Encontrar las longitudes de los otros lados del cuadrilátero.
18. Tres hombres hacen un cierto trabajo por \$246. Si esta suma ha de ser dividida entre los hombres en la razón 3:4:5, encuentre los tres montos resultantes.

## 6-10. VARIACION

Hasta este punto de nuestra discusión de las razones hemos tratado acerca de cantidades fijas. Consideraremos ahora la razón de dos variables que están relacionadas de modo tal que su razón es constante, o equivalente, una variable es igual a la otra variable multiplicada por una constante. Variables de este tipo abundan en la ciencia, en el comercio y en muchas situaciones cotidianas.

Si una variable $y$ es igual a una constante veces otra variable $x$, entonces $y$ se dice que *varía directamente* como $x$. La relación puede escribirse como

$$y = kx$$

El número fijo $k$ es llamado la *constante de proporcionalidad,* o la *constante de variación.* Las expresiones

$y$ varía directamente como $x$
$y$ varía como $x$
$y$ es directamente proporcional a $x$
$y$ es proporiconal a $x$

se usan todas con el mismo significado.

La fórmula para la circunferencia de un círculo $C = 2\pi r$ muestra que la circunferencia varía directamente como el radio y que $2\pi$

es la constante de variación. La fórmula para el área de un círculo $A = \pi r^2$ muestra que el área varía directamente como el cuadrado del radio y que $\pi$ es la constante de proporcionalidad.

Supongamos que $z$ es siempre igual a una constante veces el producto de dos variables $x$ y $y$; esto es

$$z = kxy$$

Describimos esta relación diciendo que $z$ *varía como* $x$ y $y$ *conjuntamente.*

El área de un triángulo varía como la base y la altura conjuntamente. La fórmula $A = 1/2bh$ demuestra que la constante de variación es $1/2$.

EJEMPLO 1. El peso de una esfera es proporcional al cubo de su radio. Una cierta esfera de radio de 4 plg pesa 24 lb. Encontremos el peso de una esfera de radio 6 plg hecha con el mismo material.

*Solución.* Sea $W$ libras el peso y $r$ pulgadas el radio, y escribamos

$$W = kr^3$$

Para determinar $k$, sustituimos 24 por $W$ y 4 por $r$. Así, encontramos

$$24 = 64k \quad \text{y} \quad k = \tfrac{3}{8}$$

Entonces, para todas las esferas de este material, tenemos

$$W = \frac{3r^3}{8}$$

Por tanto, el peso de la esfera de radio 6 plg es

$$W = \frac{3(6)^3}{8} = 81 \text{ lb}$$

Si una variable $y$ es siempre igual a una constante veces el recíproco de otra variable $x$, entonces decimos que $y$ *varía inversamente como* $x$, o $y$ *es inversamente proporcional* a $x$. Esta relación se expresa mediante la ecuación

$$y = \frac{k}{x}$$

La ley de Boyle es un ejemplo de variación inversa. De acuerdo con esta ley, el volumen de un gas confinado varía inversamente con

la presión si la temperatura permanece constante. Así, si $V$ denota el volumen y $p$ la presión, entonces $V = k/p$.

Los diferentes tipos de variación pueden ocurrir simultáneamente en los problemas. En la relación

$$z = \frac{kx}{y}$$

$z$ varía directamente como $x$ e inversamente como $y$. La relación

$$W = \frac{kxy^3}{z^2}$$

significa que $W$ varía conjuntamente como $xy^3$ e inversamente como $z^2$.

EJEMPLO 2. La carga máxima de seguridad para una viga varía como la anchura y el cuadrado del grueso conjunta e inversamente como la longitud. Si una viga de 3 plg de ancho, 8 plg de peralte y 12 pies de largo puede soportar una carga de hasta 2 000 lb, encuentre la carga máxima que puede, con seguridad, soportar una viga del mismo material que tiene las dimensiones siguientes: 2 plg de ancho, 6 plg de peralte y 10 pies de largo.

*Solución.* Representando con $L$, $w$, $d$ y $l$ a la carga, la anchura, peralte y longitud, respectivamente, escribimos la ley de la viga como

$$L = \frac{kwd^2}{l}$$

Sustituyendo $L = 2\,000$, $w = 3$, $d = 8$ y $l = 12$, encontramos

$$2000 = \frac{k(3)(8)^2}{12} \quad \text{y} \quad k = 125$$

Con este valor para $k$, la fórmula viene a ser

$$L = \frac{125wd^2}{l}$$

donde $L$ está en libras, $w$ y $d$ en pulgadas y $l$ en pies. Entonces la carga máxima de seguridad para la viga que tiene dimensiones $w = 2$, $d = 6$ y $l = 10$ está dada por

$$L = \frac{125(2)(6)^2}{10} = 900 \text{ lb}$$

## *EJERCICIO 6-7*

Exprese los enunciados 1 a 5 como ecuaciones, usando $k$ para la constante de variación.

1. El área superficial S de una esfera varía como* el cuadrado del radio $r$.
2. El área $A$ de un rectángulo varía conjuntamente como la base $b$ y la altura $h$.
3. El volumen $V$ de un cilindro circular es proporcional a su altura $h$ y al cuadrado de su radio $r$.
4. La atracción F entre dos cuerpos varía inversamente como el cuadrado de la distancia $s$ entre ellos.
5. Despreciando la resistencia del aire, la distancia $s$ que un cuerpo recorre cayendo desde el reposo varía directamente como el cuadrado del tiempo $t$.
6. La fuerza requerida para estirar un resorte es proporcional a la elongación. Si 24 lb estiran al resorte 3 plg, encuentre la fuerza requerida para estirar el resorte (a) 2 plg, (b) 5½ plg.
7. La cantidad de pintura requerida para pintar un piso circular varía como el cuadrado del radio. Si se requieren tres cuartos de galón para un piso de 10 pies de radio, encuentre la cantidad requerida para un piso que tiene 16 pies de radio.
8. Una fuerza constante mueve un cuerpo en una línea sobre una superficie suave. La distancia que el cuerpo recorre varía conjuntamente con la fuerza y el cuadrado del tiempo en que esta fuerza actúa. Si la distancia es de 48 pies cuando la fuerza es de 8 lb y el tiempo de 2 seg, encuentre la distancia cuando la fuerza es de 6 lb y el tiempo es de 3 seg.
9. El volumen de un gas confinado varía inversamente como la presión si la temperatura permanece inalterada. Si el volumen es de 720 $plg^3$ cuando la presión es 9 $lb/plg^2$, encuentre el volumen cuando la presión es (a) 6 lb, (b) 12 lb, (c) 15 lb.
10. El peso de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra, varía de manera inversamente proporcional con el cuadrado de la distancia desde el centro terrestre. Un cuerpo que en la superficie de la Tierra (a 4 000 mi de distancia desde el centro) pesa 64 lb, ¿cuánto pesaría a una distancia, arriba de la superficie terrestre, de (a) 1 000 mi, (b) 2 000, (c) 4 000 mi?
11. El tiempo que una cuadrilla de trabajadores necesita para realizar una labor, es inversamente proporcional al producto del número de hombres y al número de horas que trabajan diariamente. Si un grupo de 9 hombres trabajando 10 hr al día realiza una labor en 14 días, encuentre qué tiempo necesitan para hacer la misma labor 12 hombres trabajando diariamente 7 hr.
12. El volumen del gas contenido en un recipiente varía de manera directamente proporcional con una temperatura absoluta y de manera inversamente proporcional con la presión. Si el volumen es de 600 $plg^3$ cuando la temperatura absoluta es de 300° y la presión es de 15 $lb/plg^2$, encuentre el volumen cuando la temperatura absoluta es de 150° y la presión es de 60 $lb/plg^2$.
13. La resistencia eléctrica de un alambre varía de manera directamente proporcional con la longitud y de manera inversamente proporcional con el cuadrado de su radio. Un tramo de alambre que mide 100 pies de longitud

* "Varía como" = "es directamente proporcional a". (N. del T.)

y 0.02 plg de radio presenta una resistencia de 300 ohms. Encuentre la resistencia de un alambre del mismo material y de 2 500 pies de longitud y con un radio 0.05 plg.

14. La carga máxima de seguridad para una viga de 16 pies de longitud, 4 plg de ancho y 5 plg de peralte, es de 4 000 lb. Encuentre la carga máxima de seguridad para una viga del mismo material y de 12 pies de longitud, 3 pies de ancho y 9 plg de peralte. [Véase el Ej. 2, Sec. 6-10.]
15. La energía cinética de un cuerpo en movimiento es proporcional al cuadrado de su velocidad. Compare la energía cinética de un automóvil que viaja a 30 mi/hr con la del mismo automóvil viajando a 40 mi/hr.
16. La luz que recibe una página es proporcional al wataje de la lámpara e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la página y la lámpara. Compare la iluminación suministrada por una lámpara de 100 watts a una distancia de 3 pies con la que suministra una lámpara de 75 watts a una distancia de 2 pies.
17. A una distancia de 5 pies una lámpara de 75 watts suministra cierta cantidad de luz. Encuentre el wataje de otra lámpara que a una distancia de 15 pies suministra la misma cantidad de luz.
18. Compare la carga máxima de seguridad de una viga de 18 pies de longitud, 4 plg de ancho y 8 plg de peralte con la de una viga de 12 pies de longitud, 3 plg de ancho y 12 plg de peralte.
19. Compare la carga máxima de seguridad de una viga de 15 pies de longitud, 3 plg de ancho y 5 plg de peralte con la de la misma viga si ésta se voltea de modo que la dimensión de 3 plg sea la altura y la de 5 plg sea el ancho.

## EJERCICIO DE REVISION

Resuelva cada una de las ecuaciones en $x$. Descarte como raíz cualquier número que anule a un denominador (Sec. 6-1, 6-2 y 6-3).

1. $3x^2 + 12 = (x - 1)(3x - 1)$
2. $(x - 4)(x + 3) = (x - 1)(x + 2)$
3. $\dfrac{5x}{8} + \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{3x+4}{4}$
4. $\dfrac{x-1}{3} + \dfrac{2x+1}{21} = \dfrac{x}{7}$
5. $\dfrac{7}{2x} + \dfrac{3}{14} = \dfrac{5}{7x} - 3$
6. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{2}{x+2}$
7. $\dfrac{4x}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{4x^2}{x^2-1}$
8. $\dfrac{4}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3}{x-1}$
9. $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{4x-4}{x^2-4}$
10. $\dfrac{11x+10}{x(5-x)} + \dfrac{x+4}{x-5} = \dfrac{x-3}{x}$

Resuelva cada uno de los sistemas en $x$ y $y$ por el sistema de eliminación (Secs. 6-5 y 6-6).

11. $5x + y = 6$
    $3x + 2y = -2$
12. $7x + 3y = 4$
    $4x + 2y = 3$
13. $3x - 4y = 7$
    $5x - 5y = 8$
14. $x - y = 3a$
    $x + y = 3b$
15. $ax + 3y = 6$
    $ax - 2y = 2$
16. $ax + 2by = 2c$
    $2ax - by = c$

Resuelva cada sistema en $1/x$ y $1/y$ y, a partir de los resultados, obtenga $x$ y $y$ (Secs. 6-4 y 6-5).

17. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 3$
$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 4$

18. $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 2$
$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 3$

19. $\frac{5}{2x} + \frac{3}{y} = 2$
$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 3$

20. Un trabajador puede realizar una cierta tarea en 6 días, y otro puede realizarla en 8 días, mientras que un muchacho puede realizarla en 10. ¿En cuánto tiempo pueden realizarla en conjunto?
21. El denominador de una fracción excede al numerador en 2. Si se sustrae 3 del numerador y 6 del denominador la suma de la fracción original y la nueva fracción es 2. Encuentre la fracción original.
22. Un hombre obtiene un préstamo de \$20 000.00 con un interés de 8.5% para una parte y el resto al 9%. Encuentre la suma de cada uno de los préstamos si la ganancia anual total es de \$1 725.00.
23. Un hombre presta \$6 250 con una taza de interés anual y \$7 500 a un interés que es 1% mayor. El préstamo de \$7 500 gana \$25 más que el otro. Encontrar las tasas de interés.
24. Un hombre invierte \$5 600 con una cierta tasa de interés y \$7 400 con una tasa de interés de ½% mayor. La ganancia anual obtenida de sus inversiones es de \$914.50. Encontrar las tasas de interés.
25. Un estudiante alcanzó el promedio de 83 en sus tareas y 73 en sus exámenes en su curso de matemáticas. ¿Cuál será la calificación de examen final que le dará un promedio total de 80, si las tareas cuentan en un 10%, los exámenes parciales 60% y el examen final 30%?
26. Supóngase que una persona paga \$70 de seguro médico por un año. La compañía de seguros pagará 80% de los gastos médicos a partir de los \$100 pagados por el asegurado. Supongamos ahora que el asegurado tiene otra póliza que paga el 20% de su cuenta médica más 20% de lo que paga la otra compañía. Si la prima para la segunda póliza es de \$90 al año, encuentre cuál es la cuenta por gastos médicos que puede presentar el asegurado para recobrar exactamente sus gastos médicos más las dos primas.
27. Demuestre los Teoremas 6-3 al 6-8. Los teoremas pueden, en palabras, enunciarse como sigue. Si cuatro cantidades están en proporción, entonces:

(a) El producto de los *extremos* es igual al producto de los *medios*.
(b) Están en proporción por *alteración*.
(c) Están en proporción por *inversión*.
(d) Están en proporción por *adición*.
(e) Están en proporción por *sustracción*.
(f) Están en proporción por *adición* y *sustracción*.

Capítulo 7

# EXPONENTES Y RADICALES

## 7-1. LEYES DE LOS EXPONENTES

En la Sec. 3-3 definimos un exponente entero positivo. De acuerdo con dicha definición $a^n$ significa el producto formado tomando a $a$ como factor $n$ veces. Esto es,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ factores})$$

La cantidad $a^n$ es llamada la *n-ésima potencia de la base a*, y $n$ es llamado el *exponente*.

En este capítulo extenderemos la definición de exponentes para incluir a todos los números racionales. Antes de pasar a nuevos exponentes, sin embargo, enunciamos cinco leyes de los exponentes y demostramos que tales leyes son válidas para los exponentes enteros positivos. Las bases $a$ y $b$ en el enunciado de las leyes pueden ser cualesquier números reales para los cuales no se anule ninguno de los denominadores en consideración. Las demostraciones de las Leyes I y II están dadas en las Secs. 3-3 y 3-4.

Ley I $a^m a^n = a^{m+n}$

Ley II

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{si } m > n$$

$$= 1 \quad \text{si } m = n$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{si } m < n$$

Ley III $(a^m)^n = a^{mn}$

*Demostración.* Por definición, $(a^m)^n$ significa $a^m$ tomado $n$ veces como factor. Pero cada $a^m$ tiene a $a$ como factor $m$ veces repetido.

Por tanto, aparece $a$, en total, $mn$ veces repetido como factor del producto, dando así $a^{mn}$. ■

Ley IV $(ab)^m = a^m b^m$

*Demostración.* Por definición $(ab)^m$ significa el producto obtenido tomando $ab$ como factor $m$ veces repetido. Por tanto, el factor $a$ ocurre $m$ veces y el factor $b$ ocurre $m$ veces. Por los axiomas de conmutatividad y asociatividad podemos reordenar los factores de tal modo que todos los factores $a$ aparezcan inicialmente y todos los factores $b$ sigan. Así podemos escribir $(ab)^m = a^m b^m$. ■

Ley V $(a/b)^m = a^m/b^m$ si $b \neq 0$

*Demostración.* Por definición $(a/b)^m$ significa el producto de $m$ factores iguales a la fracción $a/b$. Recordando la definición que dimos para el producto de fracciones, tenemos $a^m$ como numerador del producto de las fracciones y $b^m$ como denominador de tal producto. ■

EJEMPLOS.

$$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6 \qquad (4a)^3 = 4^3 a^3 = 64a^3$$

$$\left(\frac{x^2}{2y}\right)^4 = \frac{(x^2)^4}{(2y)^4} = \frac{x^8}{16y^4} \qquad \frac{2^{n+2}x^{2m}}{2^n x^m} = 2^2 x^m = 4x^m$$

## 7-2. EXPONENTES ENTEROS NEGATIVOS Y CERO

Hemos definido los exponentes enteros positivos y establecido cinco leyes de exponentes que se aplican a ellos. Nuestro siguiente paso es el de extender la idea de exponentes para incluir al cero y a los enteros negativos. Los nuevos exponentes se definen de modo tal que satisfagan las cinco leyes de exponentes.

Primero determinemos qué significado hay que darle al símbolo $a^0$. Si la Ley II ha de ser válida cuando $m = n$, tenemos

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \qquad (a \neq 0)$$

Esta división nos dará, de acuerdo con la Ley II, un exponente nulo. Pero cualquier número distinto de cero dividido por sí mismo tiene como cociente a 1. Esto nos conduce a definir el exponente cero de la siguiente manera:

**Definición 7-1.** Si $a$ es un número no nulo, entonces

$$a^0 = 1$$

A continuación, y de manera semejante, determinamos el significado que ha de darse a $a^{-n}$ cuando $-n$ es un entero negativo. Si la Ley I ha de ser válida cuando $m = -n$, entonces

$$a^{-n}a^n = a^0 = 1$$

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación por $a^n$, tenemos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

De este modo hacemos la siguiente definición.

**Definición 7-2.** Si $n$ es un entero positivo y $a \neq 0$, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Las definiciones de $a^0$ y $a^{-n}$ han sido consecuencia de las leyes de los exponentes. De haberse dado las definiciones sin referencia a dichas leyes hubiera sido fácil verificar que satisfacen a las leyes de los exponentes.

EJEMPLOS.

$$(-3)^2(-3)^{-2} = (-3)^0 = 1 \qquad a^5a^{-3} = a^{5-3} = a^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 \qquad \frac{ax^{-2}}{by^{-5}} = \frac{ay^5}{bx^2}$$

Como lo ilustra la última ecuación, se puede pasar un factor del numerador al denominador o viceversa, si se altera el signo del exponente de dicho factor. Sin embargo, los sumandos del numerador o del denominador no pueden manejarse de esta manera. Así, por ejemplo,

$$\frac{1}{x^{-2} + y^{-2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}} = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

que no es igual a $x^2 + y^2$.

## *EJERCICIO 7-1*

Encuentre el valor de cada una de las siguientes expresiones, usando las leyes de los exponentes.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $2^2 \cdot 2^3$ | **2.** $(2^3)^2$ | **3.** $4^{-1}$ |
| **4.** $(-4)^0$ | **5.** $(2a)^0$ | **6.** $3^{-3}$ |
| **7.** $5^2 \cdot 5^{-3}$ | **8.** $(5^2)^{-2}$ | **9.** $(2 \cdot 3)^{-2}$ |
| **10.** $(4^{-2})^{-2}$ | **11.** $(-3)^{-2}$ | **12.** $(3 \cdot 8)^0$ |
| **13.** $(\frac{1}{7})^{-1}$ | **14.** $(\frac{2}{3})^{-1}$ | **15.** $(2 \cdot 7^0)^{-4}$ |

Simplifique cada expresión realizando las operaciones indicadas y dejando el resultado sin exponentes negativos o nulos.

16. $(2xy)^{-2}(3xy^3)$

17. $(x^2y^{-2})^{-1}(x^3y^0)^2$

18. $(ab^{-3})(a^{-1}b^{-1})^{-1}$

19. $\dfrac{a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}}$

20. $\dfrac{3^{-1}a^{-2}b^2}{2^{-1}a^{-4}b}$

21. $\dfrac{5^{-2}a^2b^3}{10^{-1}a^0b^{-2}}$

22. $\left(\dfrac{7x^3}{3yz}\right)^2\left(\dfrac{z}{7x^2}\right)^2$

23. $\dfrac{(8x^4y^5)^3}{(4x^3y^6)^3}$

24. $\dfrac{(10xy^3)^2}{(5x^2y)^3}$

25. $\left(\dfrac{p^{-3}q^{-2}}{2^0r^{-1}}\right)^{-2}$

26. $\left(\dfrac{p^2q^4}{pq^{-1}}\right)^{-3}$

27. $\left(\dfrac{p^3q^0}{r^2}\right)^{-1}$

28. $\dfrac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{-1}}$

29. $\dfrac{2^{-1}+1^{-1}}{2^{-1}-1^{-1}}$

30. $\dfrac{3^{-1}-5^{-1}}{3^{-1}}$

31. $\dfrac{x^{-2}y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

32. $\dfrac{y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}$

33. $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{(xy)^{-2}}$

34. $\dfrac{x^{-3}+y^{-3}}{x^{-3}-y^{-3}}$

35. $\dfrac{x^{-1}y^2+x^2y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$

36. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$

## 7-3. EXPONENTES FRACCIONARIOS

En esta sección vamos a extender la idea de exponentes para incluir todos los números racionales. Sin embargo, antes de introducir los exponentes fraccionarios, necesitamos considerar la siguiente definición.

**Definición 7-3.** Si $a$ y $b$ son dos números tales que la $n$-ésima potencia de $a$ (siendo $n$ un entero positivo) es igual a $b$, entonces $a$ es llamada la $n$-ésima raíz de $b$. Esto es, si $a^n = b$, entonces $a$ es la $n$-ésima raíz de $b$.

De acuerdo con esta definición, las ecuaciones

$$2^2 = 4, \quad (-2)^2 = 4, \quad 3^3 = 27, \quad (-3)^3 = -27$$

muestran que $+2$ y $-2$ son raíces cuadradas de 4, que 3 es una raíz cúbica de 27, y $-3$ es una raíz cúbica de $-27$. Puesto que 4 tiene dos raíces cuadradas, podría uno preguntarse cuántas raíces $n$-ésimas tiene un número. Aunque la demostración aparece posteriormente (Sec. 15-5), enunciamos ahora que todo número no nulo tiene dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, y así sucesivamente. Pero algunas de estas raíces se refieren a un nuevo sistema numérico. Este nuevo sistema numérico, que introduciremos después, no es, naturalmente, el sistema de los números reales. Vemos de inmediato que un número negativo no tiene raíz real de orden par (cuadrada, cuarta, sexta, y así sucesivamente). Esto es cierto porque cualquier potencia par de un número positivo o negativo es un número positivo. Ahora deseamos concentrar nues-

tra atención solamente en los números reales. Diferiremos para después, por tanto, la consideración de números y raíces de números que no son reales.

En lo que se refiere a las raíces de los números, escribimos los siguientes enunciados, pero sin demostración:

1. Un número positivo tiene exactamente dos raíces pares reales, siendo una de ellas positiva y la otra negativa.
2. Un número positivo o negativo tiene exactamente una raíz de orden impar, siendo el signo de la raíz igual al signo del número.
3. Un número negativo no tiene raíces reales de orden par.

Si $n$ es un entero positivo, par, la raíz positiva $n$-ésima de un número positivo $a$ es llamada *la raíz n-ésima principal de a.* Cuando $n$ es impar, la raíz $n$-ésima real de un número positivo o negativo $a$ es llamada la raíz $n$-ésima principal. La raíz $n$-ésima principal de un número se denota por $\sqrt[n]{a}$. El símbolo $\sqrt[n]{a}$ es llamado un *radical*, $a$ es llamado el *radicando* y $n$ es llamado el *índice*, u *orden*, del radical. Estamos excluyendo de nuestra consideración el caso en que el radicando es negativo y el índice es un número par.

Tenemos a continuación algunos ejemplos de raíces principales

$$\sqrt{36} = 6, \qquad \sqrt[3]{8} = 2, \qquad \sqrt[4]{81} = 3, \qquad \sqrt[5]{-32} = -2$$

Observamos que $-6$ es una raíz cuadrada de 36 y $-3$ es una raíz cuarta de 81, pero ninguna es raíz principal. El negativo de la $n$-ésima raíz principal de un número $a$ se denota por $-\sqrt[n]{a}$. Por tanto, $-\sqrt[4]{81} = -3$.

Estamos ahora en posición de considerar exponentes de la forma $m/n$, donde $m$ es un entero positivo o negativo y $n$ es un entero positivo. Tomamos en primer lugar $m = 1$ y buscamos una interpretación de $a^{1/n}$. Si la Ley III ha de ser válida, tenemos

$$(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$$

Esta ecuación muestra que la $n$-ésima potencia de $a^{1/n}$ es igual a $a$, o bien, que $a^{1/n}$ es una $n$-ésima raíz de $a$. Especificando esta raíz como la $n$-ésima raíz principal de $a$, tenemos, por definición,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En esta definición $a$ puede ser cualquier número real cuando $n$ es impar, pero excluimos los valores negativos de $a$ cuando $n$ es par.

Aplicando la Ley III nuevamente, con el entero $m \neq 1$, tenemos

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

y, además,

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Resumiendo, tenemos la siguiente definición:

**Definición 7-4.** Si $m/n$ es un número racional con $n$ positivo, entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

La forma $\sqrt[n]{a^m}$ significa la $n$-ésima raíz principal de $a^m$, y la forma $(\sqrt[n]{a})^m$ significa la $m$-ésima potencia de la raíz $n$-ésima principal de $a$. En cada forma el denominador $n$ del exponente indica una raíz y el numerador $m$ indica una potencia. Si embargo, nuevamente notamos, que $n$ representa aquí a cualquier entero positivo y $m$ representa a cualquier entero positivo o negativo.

Iniciamos nuestro estudio de exponentes definiendo exponentes enteros positivos y estableciendo las cinco leyes de operación. Extendemos entonces las definiciones para incluir a todos los números racionales. Aunque demostraciones completas de las leyes de los exponentes se hicieron tan sólo para los exponentes enteros positivos, es puede demostrar que las leyes son válidas para todos los exponentes racionales.

Suponiendo que la Ley III es válida para los exponentes racionales, podemos demostrar que un exponente fraccionario puede reducirse a términos mínimos. Así, si $m$, $n$ y $c$ son enteros, $n$ y $c$ son no nulos, tenemos

$$a^{cm/cn} = (a^{m/n})^{c/c} = a^{m/n}$$

EJEMPLO 1. $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

EJEMPLO 2.

$$81^{-3/4} = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

EJEMPLO 3. $(-32)^{3/5} = (\sqrt[5]{-32})^3 = (-2)^3 = -8$

EJEMPLO 4. $(x^{5/3}y^{3/4})(x^{1/3}y^{5/4}) = x^{5/3+1/3}y^{3/4+5/4} = x^2y^2$

EJEMPLO 5.

$$\left(\frac{4a^{-4/3}}{b^{2/3}c^{-2}}\right)^{-1/2} = \frac{4^{-1/2}a^{2/3}}{b^{-1/3}c} = \frac{a^{2/3}b^{1/3}}{2c}$$

## *EJERCICIO 7-2*

Encuentre el valor de cada expresión.

1. $16^{-1/2}$
2. $4^{5/2}$
3. $64^{-1/3}$
4. $(\frac{8}{27})^{2/3}$
5. $(\frac{4}{9})^{-3/2}$
6. $(\frac{16}{81})^{1/4}$
7. $(-32)^{4/5}$
8. $(5^{1/4})^{-4}$
9. $(5^{-1/4})^{-4}$

Simplifique cada expresión, dejando los resultados libres de exponentes negativos o nulos.

10. $x^{2/3}x^{4/3}$
11. $x^{4/5}x^{-3/5}$
12. $x^{-2/3}x^{-4/3}$
13. $5^{3/2} \div 5^{2/3}$
14. $x^{1/4} \div x^{1/6}$
15. $(x^2y^{-1})^{-1}$
16. $(x^{1/2} + 2)(x^{1/2} - 2)$
17. $(x^{1/2} + y^{1/2})^2$
18. $(x^{3/2} + 3)(x^{3/2} - 3)$
19. $(3x^{-2/3})^3$
20. $(2x^{-1/4})^4$
21. $(5^{1/3}x^{2/3})^3$
22. $(2y^{-5/8})^{-4}$
23. $(x^{-1}y^{-3/4})^{-4}$
24. $(5x^{-5/3})^{-3}$
25. $\dfrac{4^{3/2}x^{1/2}y^{2/3}}{8^{1/3}x^{-1/3}y^{5/3}}$
26. $\dfrac{9^{3/2}a^{-1}b^{3/2}}{4^{5/2}a^{-5/2}b^{1/2}}$
27. $\dfrac{27^{1/3}a^{3/4}b^{2/3}}{16^{1/2}a^{-1/4}b^{1/2}}$
28. $\left(\dfrac{x^0y^{-3/5}}{x^2y^{-4/5}}\right)^{-10}$
29. $\left(\dfrac{2^{-1/3}x^{1/2}y^{3/2}}{3^{1/3}x^{-3/2}y^{1/2}}\right)^6$
30. $\left(\dfrac{x^{1/2}y^{-3/5}}{x^0y^{-2/5}}\right)^{-5}$

## 7-4. LEYES DE LOS RADICALES

De las leyes de los exponentes pueden obtenerse ciertas leyes útiles de radicales. Damos aquí una lista de 6 leyes para radicales que son consecuencia inmediata de las leyes correspondientes para exponentes, que aparecen en la columna de la derecha. En estas fórmulas imponemos la restricción de que $c$, $m$ y $n$ sean enteros positivos, e imponemos la restricción de que $a$ y $b$, sean tales que no se anule denominador alguno y tales que ningún radical de orden par tenga radicandos positivos.

I. $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$ $\qquad (a^n)^{1/n} = (a^{1/n})^n = a$

II. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $\qquad (ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$

III. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$

IV. $\sqrt[cn]{a^{cm}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad a^{cm/cn} = a^{m/n}$

V. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ $\qquad (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/mn}$

VI. $\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$ $\qquad a^{m/n}a^{p/q} = a^{(mq+np)/nq}$

Estas leyes pueden emplearse para hacer cambios necesarios en los radicales, de los cuales los más comunes son:

1. Remover factores del radicando.
2. Remover el denominador de un radicando.
3. Expresar un radical como un radical de orden más bajo.
4. Incluir a un factor dentro de un signo radical.

Un radical se dice que está en su forma *más simple* cuando se han llevado a cabo, y hasta donde es posible, las operaciones 1, 2 y 3. La operación 2 es llamada *racionalizando el denominador.*

En los ejemplos ilustrativos y ejercicios siguientes, supondremos que todos los números literales son positivos.

EJEMPLO 1. Simplifiquemos los radicales $\sqrt{75a^3b^2}$ y $\sqrt[3]{8(x+y)^7}$.

*Solución.*

$$\sqrt{75a^3b^2} = \sqrt{25a^2b^2(3a)} = \sqrt{(5ab)^2(3a)} = 5ab\sqrt{3a}$$

$$\sqrt[3]{8(x+y)^7} = \sqrt[3]{2^3(x+y)^6(x+y)} = 2(x+y)^2\sqrt[3]{x+y}$$

EJEMPLO 2. Racionalicemos los denominadores de

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{\frac{b}{2x^2}}$$

*Solución.*

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2x^2}} = \sqrt[3]{\frac{4bx}{8x^3}} = \frac{\sqrt[3]{4bx}}{\sqrt[3]{8x^3}} = \frac{\sqrt[3]{4bx}}{2x} = \frac{1}{2x}\sqrt[3]{4bx}$$

EJEMPLO 3. Reduzcamos el orden de los radicales $\sqrt[4]{25a^2}$ y $\sqrt[6]{8x^3y^9}$.

*Solución.*

$$\sqrt[4]{25a^2} = \sqrt[4]{(5a)^2} = \sqrt{5a}$$

$$\sqrt[6]{8x^3y^9} = \sqrt[6]{(2xy^3)^3} = \sqrt{2xy^3} = y\sqrt{2xy}$$

EJEMPLO 4. Incluyamos el coeficiente de

$$2x\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}$$

con la potencia apropiada, dentro del signo radical.

*Solución.*

$$2x\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}=\sqrt{4x^2\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)}=\sqrt{4x^2-1}$$

## *EJERCICIO 7-3*

Exprese cada uno de los siguientes radicales en su forma más simple.

1. $\sqrt{12}$
2. $\sqrt[3]{-16}$
3. $\sqrt{20a^4b^2}$
4. $\sqrt[3]{48x^2y^4}$
5. $\sqrt[3]{64x^4y^5}$
6. $\sqrt[4]{32x^5y^4}$
7. $\sqrt{\frac{2}{3}}$
8. $\sqrt{\frac{3}{5a}}$
9. $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$
10. $\sqrt[3]{-\frac{3}{4}}$
11. $\sqrt[4]{\frac{2}{27}}$
12. $\sqrt{\frac{2}{3x^3}}$
13. $\sqrt[3]{\frac{2x}{3y}}$
14. $\sqrt[3]{\frac{-2x^4}{9y^4}}$
15. $\sqrt[4]{\frac{b}{4c^3}}$
16. $\sqrt[4]{\frac{3}{8a^3}}$
17. $\sqrt[4]{9}$
18. $\sqrt[4]{81x^4}$
19. $\sqrt[6]{8x^6y^9}$
20. $\sqrt[6]{81x^8y^4}$
21. $\sqrt[4]{\frac{9}{x^2}}$
22. $\sqrt[4]{\frac{25x^2}{y^2}}$
23. $\sqrt[4]{\frac{x^2+4x+4}{4x^2}}$
24. $\sqrt[4]{\frac{9x^6}{a^2-2a+1}}$

Dando al coeficiente el exponente apropiado, inclúyalo dentro del signo dical.

25. $2\sqrt{3}$
26. $2x\sqrt{y}$
27. $2x\sqrt{\frac{4-x}{4x^2}}$
28. $2a\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2}}$
29. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{3b^3}{a}}$
30. $\frac{3a}{x^2}\sqrt{\frac{2x^5}{9a}}$

Emplee las leyes de radicales adecuadas para expresar cada uno de los icales repetidos como un radical único.

31. $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$
32. $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$
33. $\sqrt{2\sqrt[3]{16}}$
34. $\sqrt[3]{3\sqrt{5}}$
35. $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{16}}$
36. $\sqrt[4]{8\sqrt{8}}$

## 7-5. ADICION Y SUSTRACCION DE RADICALES

Radicales del mismo orden y mismo radicando son llamados *radicales semejantes*. Una suma algebraica de radicales semejantes puede ser expresada como un radical sencillo usando la ley distributiva. Radicales no semejantes se transforman en radicales equivalentes que son semejantes mediante las simplificaciones pertinentes. Radicales que no se pueden expresar como radicales semejantes pueden sumarse interponiendo entre ellos un signo de más (+), pero su suma no puede escribirse como un radical único.

EJEMPLO 1.

$$2\sqrt{18} - 6\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt[4]{4} = 2\sqrt{9\ 2} - 6\sqrt{\tfrac{2}{4}} + \sqrt[4]{2^2}$$
$$= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

EJEMPLO 2.

$$\sqrt[3]{2a^4} - 3\sqrt[3]{16a} - \sqrt{2a} = a\sqrt[3]{2a} - 6\sqrt[3]{2a} - \sqrt{2a}$$
$$= (a - 6)\sqrt[3]{2a} - \sqrt{2a}$$

Los radicales no semejantes $\sqrt[3]{2a}$ y $\sqrt{2a}$ no pueden combinarse en un radical único.

EJEMPLO 3.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab} - \frac{1}{a}\sqrt{ab} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\sqrt{ab}$$

### *EJERCICIO 7-4*

**Simplifique los radicales en cada uno de los siguientes problemas y combine entonces todos los radicales semejantes.**

1. $\sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$
2. $\sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{12}$
3. $\sqrt{28} + 3\sqrt{63} - \sqrt{112}$
4. $\sqrt{20} + 2\sqrt{75} - 4\sqrt{12}$
5. $\sqrt{50} + \sqrt{63} + \sqrt{28}$
6. $\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{8}}$
7. $\sqrt{\frac{1}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} + \sqrt{12}$
8. $3\sqrt{\frac{5}{3}} + 5\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{60}$
9. $2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{50}$
10. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{54}$
11. $\sqrt{8x^3} - 3\sqrt{18x} + \sqrt{2x}$
12. $\sqrt{4xy^3} - \sqrt{16x^3y} - \sqrt{xy}$
13. $\sqrt{3x^2y} + \sqrt{12x^4y} - 3\sqrt{75x^6y^3}$
14. $\sqrt[3]{2ab} - \sqrt[3]{54ab^4} + \sqrt[3]{16a^4b^4}$
15. $\sqrt[3]{3a^2} + \sqrt[3]{24a^5b^3} - \sqrt[3]{81a^2b^6}$
16. $\sqrt[3]{16a} + \sqrt[3]{54a^4} + \sqrt[3]{24a}$
17. $\sqrt[3]{2ab^2} + \sqrt[3]{2a^4b^2} + \sqrt[3]{16ab^5}$

18. $\sqrt[4]{25a^2} + \sqrt{20a^3} + \sqrt{5a}$

19. $\sqrt{3a^2} - \sqrt[4]{9a^2} + \sqrt[6]{27a^3}$

20. $3\sqrt{2a} + 4\sqrt[4]{4a^6} + 6\sqrt[6]{8a^3}$

21. $\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2x}} - \sqrt{\frac{2}{x}}$

22. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{1}{xy}} + \sqrt[4]{x^2y^2}$

## 7-6. MULTIPLICACION Y DIVISION DE RADICALES

La fórmula II, Sec. 7-4, nos permite multiplicar dos radicales del mismo orden. Para multiplicar radicales de órdenes distintos, es necesario expresarlos como radicales equivalentes del mismo orden. El orden de los nuevos radicales deberá ser el M.C.M. de los órdenes de los radicales originales. El orden de un radical puede elevarse (fórmula IV, Sec. 7-4) multiplicando el orden del radical y el exponente del radicando por el mismo entero positivo mayor que 1.

EJEMPLO 1. Multipliquemos $2\sqrt[3]{2a}$ por $5\sqrt[3]{3a^2b}$.

*Solución.*

$$2\sqrt[3]{2a} \cdot 5\sqrt[3]{3a^2b} = 10\sqrt[3]{6a^3b} = 10a\sqrt[3]{6b}$$

EJEMPLO 2. Encontremos el producto $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(4\sqrt{3} - \sqrt{5})$.

*Solución.* Los binomios tienen radicales semejantes, y multiplicamos de la manera usual.

$$(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(4\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 8 \cdot 3 + 10\sqrt{15} - 3 \cdot 5$$

$$= 9 + 10\sqrt{15}$$

EJEMPLO 3. Encontremos el producto de $5\sqrt{3}$ y $6\sqrt[3]{2}$.

*Solución.* Expresamos primero cada radical como un radical orden 6, que es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los licales dados. Así,

$$5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt[3]{2} = 30\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = 30\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = 30\sqrt[6]{108}$$

La fórmula III de la Sec. 7-4 muestra cómo expresar el cociente dos radicales del mismo orden como un radical único. Como en multiplicación, sin embargo, los radicales de órdenes distintos en ser primero convertidos a radicales del mismo orden. Consiremos la división de dos radicales como completa cuando el cote no tenga radicales en el denominador y el radical del numer, si lo hay, está expresado en su forma más simple. El proceso

de quitar radicales de un denominador es llamado *racionalización del denominador*.

EJEMPLO 4. Encontremos el cociente de $\sqrt{6}$ dividido por $\sqrt{5}$.

*Solución.*

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$$

o, alternativamente,

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$$

EJEMPLO 5. Encontremos el cociente de $6\sqrt[3]{5}$ dividido por $2\sqrt{2}$.

*Solución.*

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{200}$$

De otro modo, convirtiendo a exponentes fraccionarios, tenemos

$$\frac{6 \cdot 5^{1/3}}{2 \cdot 2^{1/2}} = \frac{6 \cdot 5^{1/3} \cdot 2^{1/2}}{2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/2}} = \frac{6 \cdot 5^{2/6} \cdot 2^{3/6}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{5^2 \cdot 2^3} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{200}$$

Cuando el divisor es un binomio que contiene un radical de s
gundo orden en uno o ambos términos, racionalizamos el den
minador multiplicando el dividendo y divisor por una expresi
adecuadamente elegida. Para este propósito, observamos que el pr
ducto de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ es la expresión racional $a - b$. P
tanto, un factor de racionalización del tipo en consideración se
tiene cambiando el signo de uno de los términos del divisor.

EJEMPLO 6. Dividamos $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ por $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$.

*Solución.*

$$\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{24 + \sqrt{6} - 18}{32 - 27} = \frac{6 + \sqrt{6}}{5}$$

## *EJERCICIO 7-5*

**Multiplique como se indica y simplifique el resultado.**

1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$
2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$
3. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{30}$
4. $\sqrt{18x^2y} \cdot \sqrt{2xy^3}$
5. $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9}$
6. $\sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{4a^2}$

7. $\sqrt[3]{16a^2} \cdot \sqrt[3]{4ab}$ 8. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ 9. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

10. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}$ 11. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$ 12. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

13. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$ 14. $(2\sqrt{3} + 4)(2\sqrt{3} - 3)$ 15. $\sqrt{3 - \sqrt{a}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{a}}$

16. Encuentre el valor de $x^2 - 6x + 7$ si $x = 3 + \sqrt{2}$.

17. Encuentre el valor de $2x^2 + x + 1$ si $x = \sqrt{2} - 1$.

18. Encuentre el valor de $x^2 + x - 5$ si $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Efectúe las divisiones y exprese cada resultado en su forma más simple.

19. $\sqrt{63} \div \sqrt{7}$ 20. $\sqrt{11} \div \sqrt{33}$ 21. $\sqrt{7x^2} \div \sqrt{28x}$

22. $\sqrt{15a^4} \div \sqrt{3a}$ 23. $\sqrt{20x} \div 2\sqrt{5x^3}$ 24. $\sqrt[3]{108} \div \sqrt[3]{4}$

25. $2\sqrt[3]{7a} \div \sqrt[3]{2a^2}$ 26. $\sqrt[3]{15x^4} \div \sqrt[3]{4x}$ 27. $\sqrt{3} \div \sqrt[3]{3}$

28. $\sqrt[3]{9} \div \sqrt{3}$ 29. $\sqrt{ab^2} \div \sqrt[3]{a^2b}$

30. $\dfrac{\sqrt{15} + \sqrt{35}}{\sqrt{5}}$ 31. $\dfrac{1}{3 - \sqrt{5}}$ 32. $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ 33. $\dfrac{\sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}}$

34. $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ 35. $\dfrac{4\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ 36. $\dfrac{3\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}}$

## 7-7. NUMEROS COMPLEJOS

En nuestro tratamiento de exponentes fraccionarios excluimos las raíces de orden par de los números negativos. Pero las raíces de orden par, especialmente las raíces cuadradas, de los números negativos son muy importantes en matemáticas. Su uso ha contribuido al desarrollo de una gran área de las matemáticas, gran parte de las cuales tiene vital aplicación en la ingeniería y en las ciencias físicas.

Son muchas las ecuaciones que no pueden ser resueltas y muchos los problemas que no pueden ser investigados en el sistema de números reales. La ecuación $x^2 + 1 = 0$, por ejemplo, tiene solución si y sólo si $x^2 = -1$. Pero el cuadrado de cualquier número real no es negativo y, consecuentemente, la ecuación no tiene solución real. Para obtener números cuyos cuadrados son negativos, ampliamos nuestro sistema numérico para incluir un nuevo conjunto de números. La base del nuevo sistema está contenida en las siguientes definiciones.

**Definición 7-5.** Una pareja ordenada de números reales $(a, b)$ es llamada *número complejo.*

**Definición 7-6.** Dos números complejos $(a, b)$ y $(c, d)$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

**Definición 7-7.** La suma de los números complejos $(a, b)$ y $(c, d)$ es $(a + c, b + d)$.

**Definición 7-8.** El producto de los números complejos $(a, b)$ y $(c, d)$ es $ac - bd, ad + bc)$.

Estas definiciones están definitivamente fabricadas con la intención de que la suma y la multiplicación obedezcan a los seis axiomas de campo (Sec. 2-2). Consideraremos demostraciones de las propiedades de números complejos en un capítulo posterior.

Si en los números complejos $(a, b)$ y $(c, d)$ hacemos $b = d = 0$, entonces la suma y producto resultan ser

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0 + 0) = (a + c, 0)$$

$$(a \cdot 0)(c, 0) = (ac - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot c) = (ac, 0)$$

Por tanto, los números complejos de la forma $(x, 0)$ se comportan como números reales con respecto a la adición y multiplicación. A causa de este comportamiento un número complejo $(x, 0)$ es a menudo igualado al número real $x$.

Es costumbre usar la letra $i$ para representar al número complejo $(0, 1)$ y su negativo $-i$ representa naturalmente a $(0, -1)$. Mostramos ahora que $i^2$ y $(-i)^2$ son ambos números iguales a $-1$, aplicando la Definición 7-8 para la multiplicación. Así,

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$(-i)^2 = (0, -1)(0, -1) = [0 \cdot 0 - (-1)(-1), 0(-1) + (-1)0] = (-1, 0) = -1$$

Puesto que $i^2 = -1$ y $(-1)^2 = -1$, se infiere que $i$ y $-i$ son raíces cuadradas de $-1$. Para distinguir entre estas raíces cuadradas, usamos la notación $i = \sqrt{-1}$ y $-i = -\sqrt{-1}$.

De manera similar, podemos mostrar que cualquier número negativo tiene dos raíces cuadradas. Como ejemplo $\sqrt{-9} = \pm 3i$ y $\sqrt{-7} = \pm i\sqrt{7}$.

Ahora usando $a = (a, 0)$, $b = (b, 0)$ e $i = (0, 1)$, tenemos, por las Definiciones 7-7 y 7-8,

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &\quad (a, 0) + (0, b) = (a, b) \end{aligned}$$

En cada una de estas notaciones $a + bi$ y $(a, b)$ para un número complejo, $a$ es llamado la *componente real* y $b$ es llamado la *componente imaginaria* del número complejo. El número $i$ en $a + bi$ es llamado la *unidad imaginaria.*

Podemos expresar ahora la suma y el producto de dos números complejos en las dos formas

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Notamos que los miembros derechos de esas ecuaciones pueden obtenerse llevando a cabo las operaciones indicadas en los miembros izquierdos como si $i$ fuera un número real y, para el producto, reemplazando $i^2$ por $-1$. Así, la suma y el producto de dos números complejos pueden obtenerse sin memorizar fórmulas.

EJEMPLO 1. $(2 + 3i) + (4 - 5i) = 6 - 2i$.

EJEMPLO 2.

$$\begin{aligned}(3 - 4i)(5 + 5i) &= 15 - 5i - 20i^2 \\ &= 15 - 5i - 20(-1) \\ &= 35 - 5i\end{aligned}$$

Para realizar la operación de sustracción en el sistema de números complejos, sumamos el negativo del sustraendo. Así,

$$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$$

EJEMPLO 3. $(6 - 3i) - (4 + 5i) = 2 - 8i$.

De acuerdo con los valores que pueden tomar $a$ y $b$, tenemos los siguientes casos especiales de números complejos.

**Definición 7-9.**

$a + bi$ es llamado un *número imaginario* si $b \neq 0$.
$a + bi$ es llamado un *número puramente imaginario* si $a = 0$ y $b \neq 0$
$a + bi$ es llamado un *número real* si $b = 0$.

EJEMPLOS.

$2i$, $7 - 5i$, y $-4 + 3i$ son números imaginarios.

$2i$, $-6i$, e $i\sqrt{5}$ son números puramente imaginarios.

## *EJERCICIO 7-6*

Exprese cada número como producto de un número real y el número $i$.

1. $\sqrt{-4}$
2. $\sqrt{-16}$
3. $\sqrt{-11}$
4. $2\sqrt{-6}$
5. $-3\sqrt{-8}$
6. $5\sqrt{-12}$

Realice las operaciones indicadas y deje los resultados en la forma $a + bi$.

7. $(3 + 4i) + (4 + 3i)$
8. $(9 + 4i) - (-8 + 3i)$
9. $(-4 - 13i) - (7 - 8i)$
10. $(15 + 3i) - (17 - 16i)$
11. $(2 + 3i)(2 - 3i)$
12. $(4 - 3i)(4 + 3i)$
13. $(2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3})$
14. $(\sqrt{2} + 3i)(\sqrt{2} - 3i)$
15. $(c + di)(c - di)$
16. $4i(6i - 7)$
17. $(5 + 8i) - (5 - 8i)$
18. $(5 + 8i) + (5 - 8i)$
19. $(c + di) + (c - di)$
20. $(c + di) - (c - di)$

21. Demuestre que $a + bi = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$. [Sugestión: Emplee la Definición 7-6.]

## *EJERCICIO DE REVISION*

Simplifique cada expresión realizando las operaciones indicadas y dejando el resultado sin exponentes nulos o negativos (Secs. 7-1 y 7-2).

1. $(xy^2)^3(6x^2y)^2$
2. $(x^3y^0)^2(x^{-2}y^3)^2$
3. $(a^{-1}b^{-1})^{-1}(a^{-2}b^2)$
4. $\dfrac{4^{-2}a^2b^3}{10^{-1}a^0b^{-2}}$
5. $\dfrac{14a^6b^{-3}}{7a^4b^{-3}}$
6. $\dfrac{3x^2y^{-3}z^2}{6x^{-4}y^{-2}z}$
7. $\dfrac{(4x^3y^3)^3}{(8x^5y^4)^3}$
8. $\dfrac{(5xy^3)^3}{(10x^2y^3)^2}$
9. $\left(\dfrac{25b^3q^{-3}}{15b^2q^3}\right)^{-2}$
10. $\dfrac{2^{-1} - 1^{-1}}{2^{-2} + 1^{-1}}$
11. $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-3}y^{-3}}$
12. $\dfrac{y^{-3}}{x^{-3} + y^{-3}}$
13. $\dfrac{x^{-4} - y^{-4}}{x^{-4} - y^{-4}}$
14. $\dfrac{y^{-4}}{x^{-4} - y^{-4}}$
15. $\dfrac{3^{-1} - 4^{-1}}{3^{-1}}$
16. $\left(\dfrac{3xy}{y^4}\right)^2\left(\dfrac{2x^3}{y}\right)^3$
17. $\dfrac{8x^2y^3z^{-3}}{5xy^{-2}z^{-4}}$
18. $\left(\dfrac{5x^{-1}y^3}{10x^2y^4}\right)^2\left(\dfrac{6x^2y^2}{4x^{-1}y^{-1}}\right)^{-3}$

Encuentre el valor racional de cada expresión (Sec. 7-3).

19. $27^{2/3}$
20. $49^{-1/2}$
21. $9^{-3/2}$
22. $25^{3/2}$
23. $(-8)^{4/3}$
24. $(-64)^{2/3}$
25. $27^{-4/3}$
26. $(-243)^{3/5}$
27. $(-32)^{3/5}$
28. $(16^{-1/4})^{-2}$
29. $(-125)^{-4/3}$
30. $(16^{-1/3})^{3/4}$

Simplifique cada expresión, dejando los resultados sin exponentes cero o negativos (Sec. 7-3).

31. $a^{1/3}a^{3/5}$ 32. $a^{-4/3}a^{3/2}$ 33. $a^{-4/5}a^{3/5}$

34. $(2a^{-3/8})^{-4}$ 35. $(a^{5/2}+1)(a^{5/2}-1)$

36. $(a^{-1}b^{-1/3})^{-3}$ 37. $\dfrac{36^{1/2}x^{-2}y^{-1}}{6^{1/2}x^{-1/3}y^{2}}$

38. $\dfrac{81^{1/2}x^{-1/4}y^{-1/2}}{9^{5/2}x^{3/4}y^{5/4}}$ 39. $\dfrac{4^{3/2}x^{1/2}y^{2/3}}{8^{1/3}x^{-1/3}y^{1/2}}$

40. $\dfrac{16^{1/4}x^{-1/4}y^{1/2}}{27^{1/3}x^{3/4}y^{2/3}}$ 41. $\left(\dfrac{3^{-1/3}x^{-2/3}y^{1/2}}{2^{-1/3}x^{1/2}y^{3/2}}\right)^{6}$

42. $\dfrac{64^{1/2}x^{-1/4}y^{1/2}}{27^{1/3}x^{3/4}y^{2/3}}$

Exprese cada una de las siguientes radicales en la forma más simple (Sec. 7-4).

43. $\sqrt{32}$ 44. $\sqrt[3]{-81}$ 45. $\sqrt{18a^4}$

46. $\sqrt{12a^2b^4}$ 47. $\sqrt[3]{32x^4y^2}$ 48. $\sqrt{100x^7y^2}$

49. $\sqrt[3]{27x^4y^5}$ 50. $\sqrt[4]{32x^3y^6}$ 51. $\sqrt[5]{32x^6}$

52. $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 53. $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$ 54. $\sqrt{\dfrac{8}{7}}$

55. $\sqrt[3]{\dfrac{9}{64}}$ 56. $\sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}}$ 57. $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$

58. $\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{25}}$ 59. $\sqrt[4]{\dfrac{4b^3}{a}}$ 60. $\sqrt[3]{\dfrac{y^4z^4}{x^2}}$

61. $\sqrt[6]{\dfrac{x^2+2x+1}{9x^2}}$ 62. $\sqrt[4]{\dfrac{4x^6}{x^2-2x+1}}$ 63. $\sqrt[6]{\dfrac{(a-1)^3}{b^3c^3}}$

Pase el coeficiente al interior del radical, elevándolo a la potencia adecuada (Sec. 7-4).

64. $4\sqrt{2}$ 65. $4x\sqrt{y}$ 66. $2x^3\sqrt{xy^2}$

67. $3a\sqrt{\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{a^2}}$ 68. $\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{2a^3}{b}}$ 69. $\dfrac{3a}{x}\sqrt[3]{\dfrac{4x^3}{9a^2}}$

Empleando las leyes de radicación apropiadas exprese cada radical repetido como un radical simple (Sec. 7-4).

70. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ 71. $\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}$ 72. $\sqrt{3\sqrt[3]{9}}$

73. $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$ 74. $\sqrt[4]{2^3\sqrt{5}}$ 75. $\sqrt[4]{8\sqrt{8}}$

Simplifique cada radical y entonces combine todos los términos semejantes (Sec. 7-5).

76. $\sqrt{28} - 2\sqrt{63} - \sqrt{112}$
77. $\sqrt{20} - 2\sqrt{75} - 4\sqrt{12}$
78. $3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$
79. $3\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}}$
80. $2\sqrt[3]{54} + 2\sqrt[3]{40} - 6\sqrt[3]{16}$
81. $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{16}$
82. $\sqrt{12x^4y} + \sqrt{3x^2y} - 3\sqrt{75y^3}$
83. $\sqrt[3]{24a^5b^3} + \sqrt[3]{3a^2} - \sqrt[3]{81a^2b^6}$
84. $\sqrt[4]{25a^2} + \sqrt{20a} + \sqrt{45a}$
85. $\sqrt{3a} + \sqrt[4]{9a^2} - \sqrt[6]{27a^3}$
86. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} - \sqrt{\frac{4a^2}{a^2-b^2}}$
87. $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9a}{b}} + \sqrt{\frac{4a^3}{b}}$
88. $\sqrt{\frac{2a}{b}} + \sqrt[4]{\frac{324a^2}{b^2}} + \sqrt[8]{\frac{16a^4}{b^4}}$
89. $\sqrt[9]{\frac{x^3y^3}{512z^3}} - \sqrt[6]{\frac{x^2y^2}{64z^2}} - \sqrt[15]{\frac{x^5y^5}{z^5}}$

Multiplique como se indica y simplifique los resultados (Sec. 7-6).

90. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$
91. $3\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{26}$
92. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$
93. $\sqrt{3xy} \cdot \sqrt{18x^2y^4}$
94. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$
95. $\sqrt[3]{32a^2} \cdot \sqrt[3]{2ab}$
96. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}$
97. $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{2}$
98. $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}$
99. $\sqrt{3x} \cdot \sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt[3]{4x}$
100. $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{2}$
101. $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$
102. $(\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$
103. $\sqrt{4 - \sqrt{a}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{a}}$
104. $\sqrt{7 + 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{2}}$
105. $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2}$

Realice las divisiones y simplifique cada resultado (Sec. 7-6).

106. $\sqrt{72} \div \sqrt{8}$
107. $\sqrt{68} \div \sqrt{17}$
108. $\sqrt{20x} \div \sqrt{5x^2}$
109. $\sqrt[3]{21a} \div \sqrt[3]{7a^2}$
110. $\sqrt[3]{15x} \div \sqrt[3]{4x^2}$
111. $\sqrt[3]{ab^2} \div \sqrt{a^2b}$
112. $\sqrt[4]{24x^4y} \div \sqrt[4]{8x^2y^3}$
113. $\sqrt[4]{xy^2} \div \sqrt{x^2y}$
114. $\sqrt{5} \div \sqrt[6]{5}$
115. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15} - \sqrt{35}}$
116. $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$
117. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{7}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$
118. $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}}$
119. $\frac{\sqrt{13} + \sqrt{7}}{\sqrt{13} - \sqrt{7}}$
120. $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
121. $\frac{2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$
122. $\frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$
123. $\frac{2\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{3\sqrt{7} - 5\sqrt{5}}$

Capítulo 8

# ECUACIONES CUADRATICAS

## 8-1. SOLUCION POR FACTORIZACION

Una ecuación que puede expresarse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

donde $a$, $b$ y $c$ son constantes con $a \neq 0$, es llamada *una ecuación cuadrática en x.*

Una operación importante realizable en una ecuación cuadrática es la de encontrar *el conjunto de soluciones*, o *raíces*, de la ecuación. Si falta el término de primer grado, las raíces pueden obtenerse fácilmente. Por ejemplo, las raíces de $x^2 - 16 = 0$ son $x = \pm 14$, y las raíces de $x^2 + 9 = 0$ son $x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$.

Si el miembro izquierdo de una ecuación de la forma (1) puede separarse en dos factores lineales, las raíces se obtienen fácilmente de estos factores. El principio clave en este método es el hecho de que el producto de dos factores es igual a cero si cualquiera de los factores es igual a cero (Teorema 2-6, Sec. 2-3). Por tanto, las dos ecuaciones lineales obtenidas al igualar a cero cada factor, nos dan las raíces.

EJEMPLO. Resolvamos la ecuación $6x^2 + 5x - 4 = 0$.

*Solución.* Factorizando el miembro izquierdo, tenemos

$$(2x - 1)(3x + 4) = 0.$$

Tenemos ahora las dos ecuaciones lineales

$$2x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 3x + 4 = 0.$$

De estas ecuaciones encontramos $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{4}{3}$. Cualquiera de

estos valores satisfará a la ecuación dada. Verificando $x = \frac{1}{2}$, encontramos

$$6(\tfrac{1}{2})^2 + 5(\tfrac{1}{2}) - 4 = \tfrac{6}{4} + \tfrac{5}{2} - 4 = 0$$

### *EJERCICIO 8-1*

**Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $x^2 - 3 = 0$ | **2.** $x^2 - a^2 = 0$ | **3.** $x^2 + 25 = 0$ |
| **4.** $9x^2 + 2 = 0$ | **5.** $a^2x^2 + b^2 = 0$ | **6.** $4x^2 + 1 = 0$ |

**Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para $x$ por el método de factorización. Compruebe las soluciones.**

| | | |
|---|---|---|
| **7.** $x^2 - x - 2 = 0$ | **8.** $x^2 + x - 6 = 0$ | **9.** $x^2 + 9x + 8 = 0$ |
| **10.** $2x^2 - x = 10$ | **11.** $2x^2 + 3x + 1 = 0$ | **12.** $7x^2 - 11x = 0$ |
| **13.** $81x^2 - 1 = 0$ | **14.** $9x^2 - 25 = 0$ | **15.** $4x^2 - 49 = 0$ |
| **16.** $6x^2 + 11x = -3$ | **17.** $2x^2 - 5x + 3 = 0$ | **18.** $6x^2 - 5x + 1 = 0$ |
| **19.** $18x^2 + 3 = 29x$ | **20.** $8x^2 = 14x - 5$ | |
| **21.** $12x^2 + 5x = 2$ | **22.** $x^2 + (a + 1)x + a = 0$ | |
| **23.** $x^2 - ax + bx - ab = 0$ | **24.** $a^2x^2 + abx - 2b^2 = 0$ | |
| **25.** $ax^2 - abx + x - b = 0$ | | |

## 8-2. SOLUCION USANDO FORMULA

Las raíces de una ecuación cuadrática se obtienen muy convenientemente por factorización si ésta puede hacerse con facilidad. Para otros casos necesitamos un procedimiento practicable. Si de alguna manera resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, obtenemos las raíces en términos de los coeficientes literales $a$, $b$ y $c$. Entonces las raíces de esta ecuación pueden utilizarse como una fórmula para resolver otras ecuaciones cuadráticas. Obtenemos la fórmula deseada dando los siguientes pasos.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c \qquad \text{sumando } -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{dividiendo por } a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \qquad \text{sumando } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{tomando raíces cuadradas}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{sumando } -\frac{b}{2a}$$

Así hemos establecido el siguiente teorema.

**Teorema 8-1.** Las raíces $x_1$ y $x_2$ de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o, expresado de otro modo, la solución es

$$\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

El conjunto de soluciones de la ecuación de este teorema es llamado la *fórmula cuadrática*. La corrección de los resultados que hemos encontrado para $x$ puede verificarse por sustitución directa en la ecuación dada.

Los pasos que hemos tomado para encontrar la fórmula cuadrática se llaman el método de *completar el cuadrado*. Esto es, hemos manejado la ecuación para convertir el miembro izquierdo en un cuadrado perfecto.

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$ completando el cuadrado.

*Solución.*

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$3x^2 + 5x = 2 \qquad \text{sumando 2}$$

$$x^2 + \tfrac{5}{3}x = \tfrac{2}{3} \qquad \text{dividiendo por 3}$$

$$x^2 + \tfrac{5}{3}x + \tfrac{25}{36} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{25}{36} \qquad \text{sumando } (\tfrac{5}{6})^2$$

$$(x + \tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{49}{36}$$

$$x + \tfrac{5}{6} = \pm\tfrac{7}{6} \qquad \text{tomando raíces cuadradas}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6} \qquad \text{sumando } -\tfrac{5}{6}$$

$$x = \tfrac{1}{3} \quad \text{y} \quad -2$$

EJEMPLO 2. Usemos la fórmula cuadrática para resolver la ecuación

$$3x^2 - 4x + 5 = 0$$

*Solución.* Comparando los coeficientes de esta ecuación con los correspondientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, vemos que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 5$. Por tanto, sustituimos estos valores para $a$, $b$ y $c$ en la fórmula cuadrática. Así obtenemos

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{-44}}{6}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{-11}}{6} = \frac{2 \pm i\sqrt{11}}{3}$$

*Verificación.* Mostramos que estos valores de $x$ reducen el miembro izquierdo de la ecuación dada a cero y son, por tanto, las raíces.

$$3\left(\frac{2 \pm i\sqrt{11}}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2 \pm i\sqrt{11}}{3}\right) + 5 = 3\left(\frac{4 \pm 4i\sqrt{11} + 11i^2}{9}\right) - \frac{8 \pm 4i\sqrt{11}}{3} + 5$$

$$= \frac{4 \pm 4i\sqrt{11} - 11 - 8 \mp 4i\sqrt{11} + 15}{3} = 0$$

## *EJERCICIO 8-2*

Resuelva las siguientes ecuaciones completando el cuadrado y verifique cada resultado obtenido.

**1.** $x^2 - 4x - 3 = 0$
**2.** $x^2 + 6x + 8 = 0$
**3.** $2x^2 - 5x + 2 = 0$
**4.** $2x^2 - x - 3 = 0$
**5.** $x^2 - 4x - 1 = 0$
**6.** $2x^2 + 5x + 3 = 0$
**7.** $x^2 - 8x + 25 = 0$
**8.** $9x^2 + 10 = 12x$
**9.** $2x^2 - 6x + 9 = 0$

Resuelva para $x$ por la fórmula cuadrática y verifique cada resultado obtenido.

**10.** $x^2 - 6x + 8 = 0$
**11.** $x^2 + 8x + 16 = 0$
**12.** $x^2 - 10x + 25 = 0$
**13.** $4x^2 - 12x + 9 = 0$
**14.** $42x^2 - x - 1 = 0$
**15.** $x^2 - x - 3 = 0$
**16.** $3x^2 + 10x + 4 = 0$
**17.** $x^2 + x + 1 = 0$
**18.** $x^2 - 6x + 10 = 0$
**19.** $4x^2 - 9x + 3 = 0$
**20.** $3x^2 + 11x + 7 = 0$
**21.** $2x^2 - 2x + 5 = 0$

**22.** $x^2 + (b - a)x - ab = 0$ **23.** $mx^2 + (1 + m)x + 1 = 0$

**24.** $abx^2 + (2b - 3a)x - 6 = 0$ **25.** $(a + b)^2x^2 - (a + b)x - 2 = 0$

**26.** Se pretende cercar un terreno rectangular y dividirlo en 3 partes con dos cercas interiores y paralelas a uno de los lados. Encuentre las dimensiones del terreno si la longitud total de las cercas ha de ser 800 m y el área del terreno es (a) 19 200 m² (b) 20 000 m².

*Solución.* Refiriéndonos a la Fig. 8-1, tenemos

$$400x - 2x^2 = 19{,}200$$
$$x^2 - 200x + 9600 = 0$$
$$(x - 80)(x - 120) = 0$$
$$x = 80 \text{ o } 120$$

Si la anchura es 80 m, la longitud es 240 m; si la anchura es 120 m; la longitud es 160 m. Cada una de estas soluciones satisface las condiciones del problema. La parte (b), sin embargo, tiene sólo una solución, como usted podrá verificarlo.

**27.** El producto de dos enteros impares consecutivos es 143. Encuentre los enteros impares.

**28.** Dos números difieren en una unidad; sus cubos difieren en 91 unidades. Encuentre los números.

**29.** Un jardinero desea cercar un terreno rectangular de 300 m. Un río corre a lo largo de uno de los lados y, por tanto, no se necesita cerca en ese lado. Encuentre las dimensiones del rectángulo si (a) el área es 10 000 m²; (b) 11 250 m².

**30.** Una página, con 3 plg más de longitud que de anchura, tiene 80 plg² de impresión. Los márgenes superior e inferior son cada uno de 1.5 plg de ancho y los márgenes laterales son de 1 plg de ancho. Encuentre las dimensiones de la página.

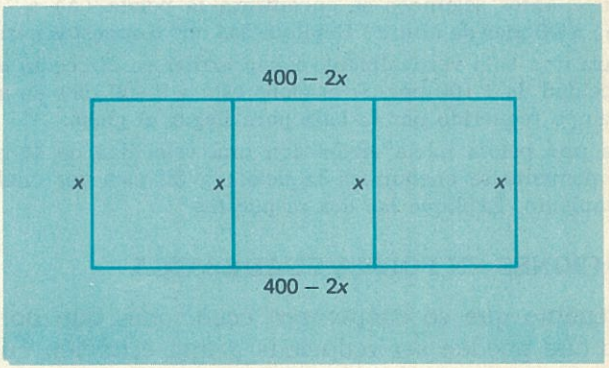



*Figura 8-1*

**31.** Un avión a reacción, que viaja a 500 mph más rápidamente que un avión de hélices, recorre una distancia de 1 400 m en 5 hr menos que el tiempo requerido por el avión de hélices para recorrer la misma distancia. Encuentre las velocidades de los aviones.

32. Un hombre puede hacer un trabajo en 9 hr menos que las requeridas por un muchacho. Trabajando juntos, pueden hacer el trabajo en 20 hr. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno haciendo el trabajo por sí solo?
33. Un terreno rectangular ha de ser cercado en sus cuatro lados y dividido en dos partes por una cerca paralela a uno de los lados. Encuentre las dimensiones del terreno si la longitud total de cerca es 600 m y el área del terreno es (a) 11 250 m²; (b) 15 000 m².
34. Una autopista y una vía de tren se encuentran en ángulo recto. Un tren se encuentra a 10 mi de la intersección al tiempo que un automóvil se encuentra a 6 mi de la misma. Si cada uno viaja a razón de ½ mi/min (media milla por minuto), ¿en qué momento se encontrará el automóvil a cuatro millas de distancia del tren?

Resuelva los Probs. 35 a 39 usando las siguientes fórmulas.

Si un objeto cae libremente habiendo sido lanzado con una velocidad $v_0$, la distancia $s$ que recorrerá el objeto en $t$ segundos está dada por la fórmula

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

donde $s$ se mide en metros, $v_0$ en pies por segundo (pps) y $g$ es 32 (aproximadamente).

Si el objeto es arrojado verticalmente hacia arriba, la fórmula es

$$s = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

35. Si se suelta una pelota ($v_0 = 0$) desde una torre, encuentre qué tanto tiempo tarda para llegar al suelo si la altura de la torre es (a) 256 pies; (b) 144 pies; (c) 64 pies.
36. Desde un aeróstato se suelta una canica hacia abajo con una velocidad de 64 pps. Encuentre (a) qué distancia viaja la canica en tres segundos; (b) qué tanto tiempo tarda en recorrer 512 pies.
37. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 pps. ¿En cuántos segundos se encontrará la pelota (a) a 100 pies de altura; (b) a 96 pies de altura? Explique las dos respuestas para la parte (b).
38. Se dispara una bala verticalmente hacia arriba en dirección a un globo con una velocidad de 1 100 pps. Si el globo está a 9 400 pies de altura, encuentre el tiempo requerido por la bala para llegar al globo.
39. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 48 pps, encuentre en qué momento se encontrará la pelota a 32 pies por encima del punto de lanzamiento. Explique las dos respuestas.

## 8-3. ECUACIONES EN FORMA CUADRATICA

Es frecuente que se encuentren ecuaciones que no son cuadráticas, pero que pueden ser reducidas a una ecuación cuadrática por sustitución con una nueva incógnita.

EJEMPLO 1. Resuelva la ecuación $y^4 - 3y^2 - 4 = 0$.

*Solución.* Esta ecuación de cuarto grado cuando se escribe como

$$(y^2)^2 - 3y^2 - 4 = 0$$

aparece siendo cuadrática en $y^2$. La sustitución $y^2 = x$ nos da la ecuación cuadrática

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

cuyas raíces son $x = -1$ y $x = 4$. Reemplazando entonces $x$ por $y^2$, tenemos

$$y^2 = -1 \quad \text{y} \quad y^2 = 4$$

$$y = \pm i \quad \text{y} \quad y = \pm 2.$$

Estos cuatro valores son las raíces de la ecuación dada. Se deja la verificación al estudiante.

Alternativamente, podemos encontrar $y^2$ directamente usando la fórmula cuadrática o factorizando. Así, factorizando encontramos

$$(y^2 + 1)(y^2 - 4) = 0.$$

Igualando entonces cada factor a cero obtenemos las cuatro raíces.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación $x + 2x^{1/2} - 8 = 0$.

*Solución.* Esta ecuación es cuadrática en $x^{1/2}$. Aplicamos la fórmula cuadrática y obtenemos

$$x^{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = -1 \pm 3$$

$$x^{1/2} = -4 \quad \text{y} \quad x^{1/2} = 2$$

Recordamos que $x^{1/2} = +\sqrt{x}$, y no $-\sqrt{x}$. Por tanto, $x^{1/2}$ no puede ser negativo y, en consecuencia, $x^{1/2} = -4$ no tiene solución. La ecuación $x^{1/2} = 2$ nos da $x = 4$, que es la única raíz de la ecuación dada.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación

$$\frac{x^2 - 4}{x} - \frac{4x}{x^2 - 4} + 3 = 0$$

*Solución.* Sustituyendo $y = (x^2 - 4)/x$ obtenemos

$$y - \frac{4}{y} + 3 = 0$$

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

Las raíces de la última ecuación son $y = 4$ y $y = 1$. Por tanto, formamos las dos ecuaciones

$$\frac{x^2 - 4}{x} = -4 \quad \text{y} \quad \frac{x^2 - 4}{x} = 1$$

Estas ecuaciones nos dan las ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + 4x - 4 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 - x - 4 = 0$$

cuyas soluciones son, respectivamente, $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$ y $x = (1 \pm \sqrt{17})/2$. El estudiante puede verificar estos valores.

### *EJERCICIO 8-3*

Resuelva las siguientes ecuaciones.

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
2. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
3. $x^4 - x^2 - 2 = 0$
4. $x - x^{1/2} - 30 = 0$
5. $x - 4x^{1/2} + 3 = 0$
6. $x^{2/3} + 7x^{1/3} + 12 = 0$
7. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 4 = 0$
8. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0$
9. $x^{-4} - 8x^{-2} - 9 = 0$
10. $x^{1/2} - 3x^{-1/2} + 2 = 0$
11. $6x^{1/2} + x^{-1/2} - 5 = 0$
12. $(2x^2 + x)^2 = 4(2x^2 + x) - 3$
13. $(x^2 - 5x)^2 + (x^2 - 5x) = 12$
14. $(x^2 - 3x) - 3\sqrt{x^2 - 3x} + 2 = 0$
15. $(x^2 + 2x) - \sqrt{x^2 + 2x} - 2 = 0$
16. $x^2 - 9x^{-2} - 8 = 0$
17. $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 - \dfrac{x-1}{x} - 2 = 0$
18. $\dfrac{x^2 - 3}{x - 1} = 2\left(\dfrac{x-1}{x^2-3}\right) - 1$
19. $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right) - \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{1/2} - 2 = 0$
20. $4x^2 - 3x + \dfrac{5}{4x^2 - 3x} - 6 = 0$

## 8-4. ECUACIONES CONTENIENDO RADICALES

Una ecuación en la que la incógnita aparece bajo un signo de radical es llamada ecuación *radical*, o *irracional*. El proceso usual para resolver una ecuación tal, consiste en elevar ambos miembros de una ecuación a alguna potencia entera positiva. La ecuación así obtenida tiene todas las raíces de la original. Esto es cierto porque las potencias enteras positivas de dos números iguales son iguales. La nueva ecuación, sin embargo, puede tener raíces que no son raíces de la ecuación original. Estas raíces son llamadas *extrañas*. Toda raíz extraña puede detectarse verificando en la ecuación dada.

Damos ahora una lista de los pasos que se llevan a cabo para resolver un ecuación radical de segundo orden.

1. Arregle los miembros de la ecuación de modo que uno de los miembros quede sustituido por un radical sencillo.
2. Elimine este radical elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación.
3. Repita los pasos 1 y 2, si es necesario, hasta obtener una ecuación sin radicales.
4. Resuelva la ecuación resultante y pruebe todas sus raíces en la ecuación original. Deseche las raíces extrañas.

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}-1=0$.

*Solución.*

Trasponiendo: $\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+1}-1$

Elevando al cuadrado: $x+4=2x+1-2\sqrt{2x+1}+1$

Trasponiendo: $2\sqrt{2x+1}=x-2$

Elevando al cuadrado: $4(2x+1)=x^2-4x+4$

Trasponiendo: $x^2-12x=0$

$x(x-12)=0$

$x=0 \quad \text{y} \quad 12$

*Verificación.* Sustituimos, 0 y 12, en turno, en lugar de $x$ en el miembro izquierdo de la ecuación dada. Así.

$$\sqrt{0+4}-\sqrt{0+1}+1=2-1+1\neq 0$$

$$\sqrt{12+4}-\sqrt{24+1}+1=4-5+1=0$$

Aunque $x=0$ es una raíz de la ecuación cuadrática, no satisface la ecuación dada. Así, 12 es la única raíz de la ecuación radical. Recalcamos que $\sqrt{4}=+2$ es la raíz cuadrada principal, y $-\sqrt{25}=-5$ es el negativo de la raíz cuadrada principal.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{2x-3}-\sqrt{7x-5}+\sqrt{x+2}=0.$$

*Solución.*

Trasponiendo: $\sqrt{2x-3}=\sqrt{7x-5}-\sqrt{x+2}$

Elevando al cuadrado: $2x-3=7x-5-2\sqrt{(7x-5)(x+2)}+x+2$

Trasponiendo: $2\sqrt{(7x-5)(x+2)}=6x$

$\sqrt{(7x-5)(x+2)}=3x$

Elevando al cuadrado: $7x^2+9x-10=9x^2$

Trasponiendo: $2x^2-9x+10=0$

Las raíces de esta ecuación son $x=2$ y $x=\frac{5}{2}$. Estos valores son también raíces de la ecuación dada. Dejamos al lector las verificaciones.

## *EJERCICIO 8-4*

Resuelva las siguientes ecuaciones. Verifique sus resultados.

1. $\sqrt{x^2+5}=3$
2. $\sqrt[3]{x^2-7x}=2$
3. $\sqrt{6x-8}=x$
4. $\sqrt{5x+6}=x+2$
5. $\sqrt{4-x}=x-4$
6. $\sqrt{3x+2}=-5$
7. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=3$
8. $\sqrt{2x+13}-\sqrt{x+10}=1$
9. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=1$
10. $\sqrt{2x+11}-\sqrt{x+2}=2$
11. $\sqrt{5-4x}+\sqrt{13-4x}=4$
12. $\sqrt{x+6}=\sqrt{6x+6}-\sqrt{x}$
13. $\sqrt{x}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{6x+12}$
14. $\sqrt{x+9}-\sqrt{x-3}=2\sqrt{x+5}$
15. $\sqrt{7-2x}-\sqrt{3-x}-\sqrt{4-x}=0$
16. $\sqrt{1-x}+\sqrt{7-x}-\sqrt{12-6x}=0$
17. $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+6}=0$
18. $\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{x^2+x+7}+1=0$
19. $\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2-x+3}-1=0$
20. $\sqrt{4x^2-x-8}-\sqrt{4x^2+3x+4}+2=0$

## 8-5. NATURALEZA DE LAS RAICES

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ están dadas por las fórmulas

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Al obtener estas fórmulas no impusimos restricción alguna sobre los coeficientes $a$, $b$ y $c$, excepto la que $a\neq 0$. Con esta única excepción, las fórmulas son válidas para valores de los coeficientes reales o imaginarios. Señalamos ahora algunas propiedades de las raíces cuando los coeficientes son reales y también cuando son números racionales. Las propiedades dependen del radicando $b^2-4ac$, llamado el *discriminante*.

1. Si $b^2-4ac=0$, las raíces son reales e iguales.
2. Si $b^2-4ac>0$, las raíces son reales y desiguales.
3. Si $b^2-4ac<0$, las raíces son imaginarias y desiguales.

Si ahora imponemos la restricción que $a$, $b$ y $c$ sean números racionales y el discriminante sea positivo, serán válidos los siguientes enunciados.

4. Si $b^2-4ac$ es un cuadrado perfecto, las raíces son racionales.
5. Si $b^2-4ac$ no es un cuadrado perfecto, las raíces son irracionales.

Estas conclusiones pueden verificarse fácilmente. Si el discriminante es cero, las raíces son ambas iguales a $-b/2a$. Claramente, las raíces son desiguales cuando el discriminante no es cero. Además, las raíces son imaginarias si y sólo si el discriminante es negativo. Si $a$, $b$ y $c$ son racionales, entonces $b^2 - 4ac$ es racional y, si es positivo, se infieren inmediatamente los enunciados 4 y 5.

EJEMPLO 1. Sin resolver la ecuación, determinemos la naturaleza de las raíces de $2x^2 + 8x + 3 = 0$.

*Solución.* Calculando, encontramos $b^2 - 4ac = 8^2 - 4(2)(3) = 0$. El discriminante es positivo y no es un cuadrado perfecto; por tanto, las raíces son reales, irracionales y desiguales.

EJEMPLO 2. Calculemos el valor del discriminante y determinemos las raíces de la ecuación $\sqrt{2}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$.

*Solución.* $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = 4 - 4\sqrt{6} < 0$. Por tanto, las raíces son imaginarias y desiguales.

## 8-6. SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAICES

Denotando las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ mediante $x_1$ y $x_2$, encontramos que su suma es

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

que su producto es

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Estas fórmulas, $-b/a$ y $c/a$, nos permiten encontrar la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática inmediatamente. Las fórmulas también pueden usarse como una rápida verificación, ya obtenida la solución de la ecuación cuadrática. La prueba consiste, simplemente, en observar si la suma y el producto de las dos raíces supuestas satisfacen las condiciones $-b/a$ y $c/a$.

EJEMPLO 1. La suma y producto de las raíces de $8x^2 - 10x - 3 = 0$ son, respectivamente, $\frac{5}{4}$ y $-\frac{3}{8}$. Las raíces de la ecuación

son $\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{4}$ porque la suma de estos valores es $\frac{5}{4}$ y el producto es $-\frac{3}{8}$.

Notamos que la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene $a = 1$, y, en consecuencia, la suma de las raíces es $-b$ y el producto es $c$. Este hecho puede emplearse para formar una ecuación cuadrática cuyas raíces son dos números dados.

EJEMPLO 2. Formemos una ecuación cuadrática cuyas raíces sean $-\frac{3}{2}$ y $5$:

*Solución.* Tomando como coeficiente del término de segundo grado a la unidad, podemos usar el negativo de la suma de las raíces como coeficiente del término de primer grado y como término constante al producto de las raíces. Así pues, $-\frac{3}{2} + 5 = \frac{7}{2}$ y $5\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{2}$ en consecuencia la ecuación deseada es

$$x^2 - \tfrac{7}{2}x - \tfrac{15}{2} = 0 \quad \text{o} \quad 2x^2 - 7x - 15 = 0$$

También puede formarse la ecuación invirtiendo las operaciones de resolución de una ecuación cuadrática por factorización. Así escribimos

$$(x + \tfrac{3}{2})(x - 5) = 0$$

Vemos de inmediato que las raíces de esta ecuación son $-\frac{3}{2}$ y $5$. Multiplicando los factores, tenemos, como antes, la ecuación $x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} = 0$.

EJEMPLO 3. Encontremos el valor de $k$ que hace que para la ecuación $x^2 + 9x + k = 0$ una raíz sea el doble de la otra.

*Solución.* Sean $x_1$ y $2x_1$ las dos raíces. Tenemos entonces $x_1 + 2x_1 = -9$ y $x_1 = -3$. Para encontrar $k$ escribimos $k = x_1\,(2x_1) = (-3)(-6) = 18$. La ecuación dada resulta entonces ser $x^2 + 9x + 18 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $-3$ y $-6$.

## *EJERCICIO 8-5*

Sin resolver, determine la naturaleza de las raíces de cada ecuación. Encuentre también la suma y el producto.

1. $x^2 + 6x + 5 = 0$
2. $x^2 + 2x + 6 = 0$
3. $2x^2 - x - 7 = 0$
4. $2x^2 + 5x + 5 = 0$
5. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
6. $3x^2 + 7x - 1 = 0$
7. $5y^2 + 3 = 0$
8. $10y^2 + 3y = 0$
9. $7y^2 - 4 = 0$
0. $\sqrt{2}x^2 + 2x - 1 = 0$
11. $\sqrt{3}x^2 - 4x - \sqrt{2} = 0$
2. $x^2 + \sqrt{5}x - \sqrt{2} = 0$
13. $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{5}x - 3\sqrt{2} = 0$

Encuentre una ecuación cuadrática con coeficientes enteros cuyas raíces on los números dados.

4. $2, -1$
15. $3, 4$
16. $-2, -6$
7. $\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}$
18. $\frac{2}{5}, \frac{5}{2}$
19. $-\frac{3}{2}, \frac{4}{5}$
0. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$
21. $2i, -2i$
22. $3 - i, 3 + i$
3. $3 \pm \sqrt{3}$
24. $\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$
25. $\sqrt{3} \pm i\sqrt{7}$

Determine el valor de $k$ de modo que la condición dada se satisfaga.

3. $x^2 + 3x + k = 0$, las raíces son iguales.
7. $kx^2 - 6x + 3 = 0$, las raíces son iguales.
3. $2x^2 - kx + k = 0$, las raíces son iguales.
). $kx^2 + 6x + 32 = 0$, la suma de las raíces es $-2$.
). $7x^2 - 3kx + 41 = 0$, la suma de las raíces es 0.
1. $3x^2 + 41x + k = 0$, el producto de las raíces es 7.
2. $x^2 - kx + 18 = 0$, una raíz es el doble de la otra.
3. $4x^2 - 3x + k = 0$, una raíz es el triple de la otra.
4. $x^2 - 4x + k = 0$, la diferencia de las raíces es 6.
5. $x^2 - 7x + k - 4 = 0$, la diferencia de las raíces es 5.
). $3kx^2 - 5x + 4k - 26 = 0$, el producto de las raíces es $-3$.
7. $4x^2 + 10x + k = 0$, una raíz es el recíproco de la otra.
3. $5x^2 - (k + 2)x + 7k - 6 = 0$, una raíz es 2.
). $kx^2 + (3k - 4)x - 5 = 0$, una raíz es ½.

## 7. LA GRAFICA DE UNA FUNCION CUADRATICA

La función definida por la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

s llamada una *función cuadrática*. La gráfica de la función es llaada una *parábola*. (Suponemos que $a$, $b$ y $c$ son números reales.) i la gráfica tiene un punto sobre el eje de las $x$, la abscisa del punto s el valor de $x$ que anula a $y$. Este valor de $x$ es un cero de la funión (Sec. 5-3), y es una raíz de la ecuación $y = ax^2 + bx + c = 0$. or tanto, las raíces reales, si las hay, de una ecuación cuadrática ueden obtenerse (al menos aproximadamente) a partir de la gráfia de la ecuación cuadrática. Para encontrar los ceros de una fun-

ción cuadrática, emplearemos un teorema que se demuestra en cálculo.

**Teorema 8-2.** Si $f(x)$ representa a un polinomio con coeficientes reales y si $a$ y $b$ son dos números reales tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real entre $a$ y $b$.

Interpretado geométricamente, este teorema dice que la gráfica de $y = f(x)$ cruza al eje de las $x$ al menos una vez entre dos de sus puntos que se encuentren en lados opuestos del eje de las abscisas.

EJEMPLO 1. Trazar la gráfica de la función definida por la ecuación

$$y = 2 + 2x - x^2$$

*Solución.* Procediendo como en la Sec. 5-3, preparamos una tabla de valores correspondientes de $x$ y $y$, y trazamos una curva suave por los puntos así determinados (Fig. 8-2).

| $x$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $1$ | $2$ | $2.5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0.75$ | $2$ | $3$ | $2$ | $0.75$ | $-1$ |

La gráfica es una parábola que se abre hacia abajo y cruza al eje de las $x$ en dos puntos. Estimamos las abscisas de estos puntos en $x = -0.7$ y $x = 2.7$. Estos valores son aproximaciones a los ceros de la función y las raíces de la ecuación $2 + 2x - x^2 = 0$.

Puede observarse que la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ no toca al eje de las abscisas cuando $b^2 - 4ac < 0$. El discriminante negativo significa que la función no tiene ceros reales y la correspon

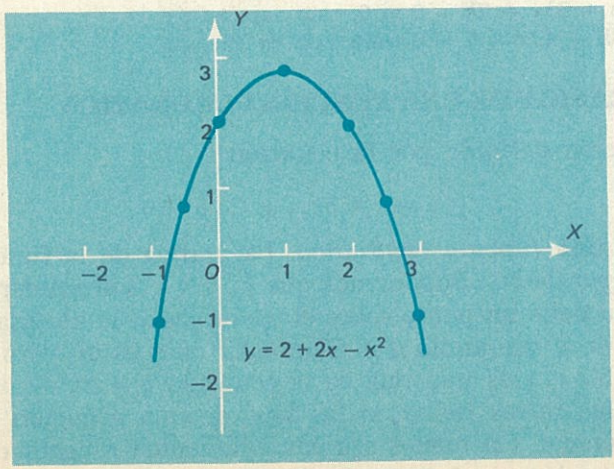



*Figura 8-2*

ente ecuación cuadrática no tiene raíces reales. Tenemos, por ra parte, que la gráfica cruza al eje de las abscisas en dos puntos $b^2 - 4ac > 0$, y toca al eje de las abscisas en un punto solamente si $b^2 - 4ac = 0$. Por tanto, el discriminante revela si la áfica de una función cuadrática cruza al eje de las abscisas en os puntos, toca al eje de las abscisas en un punto, o no tiene puns en común con el eje de las abscisas. Estas tres posibilidades se ustran en las gráficas de la Fig. 8-3 en donde aparecen las gráficas e las funciones $y = x^2 - 2x - 1$, $y = x^2 - 2x + 1$, y $y = x^2 - 2x - 3$, cuyos discriminantes son positivo, nulo y negativo, respectiamente.

## 8. VALORES MAXIMOS Y MINIMOS

La parábola en la Fig. 8-2 se abre hacia abajo y las parábolas e la Fig. 8-3 se abren hacia arriba. La concavidad de la gráfica de función $y = ax^2 + bx + c$ (que se abre hacia arriba o se abre acia abajo) depende, como veremos, del coeficiente de $x^2$.

**eorema 8-3.** La gráfica de la función definida por la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

se abre hacia arriba desde un punto más bajo si $a$ es positivo y se abre hacia abajo desde un punto más alto si $a$ es negativo.

*Demostración.* Los pasos siguientes pueden seguirse con facidad,

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

La cantidad $(x + b/2a)^2$ es igual a cero cuando $x = -b/2a$ es positiva para todos los demás valores de $x$. En consecuencia, ste valor de $x$ nos da el valor mínimo de $y$ cuando $a$ es positivo y l valor máximo cuando $a$ es negativo. Por tanto, el punto de coorenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

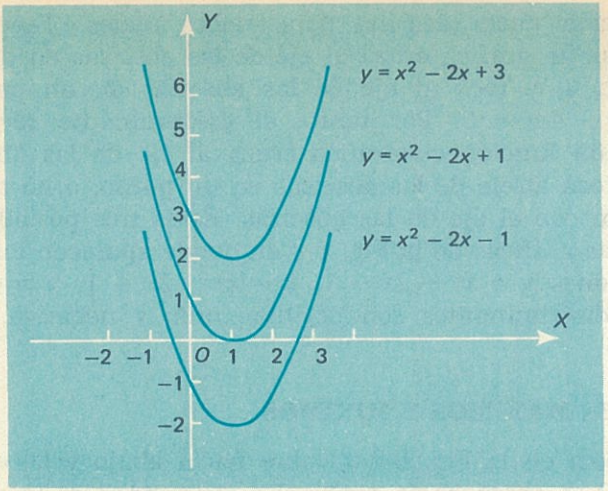



*Figura 8-3*

es el punto más bajo o *punto mínimo* de la gráfica si $a > 0$ y e punto más alto o *punto máximo* si $a < 0$. Este punto es llamad el *vértice* de la parábola. La ordenada del vértice es el valor míni mo o el valor máximo de la función dependiendo esto de que l gráfica se abra hacia arriba o hacia abajo.

EJEMPLO 1. Encontremos las coordenadas del punto mínim de la gráfica de la función definida por la ecuación $y = 2x^2 + 6$ $+ 2$.

*Solución.* Cambiamos la forma del miembro derecho sumand y sustrayendo $\frac{9}{2}$. Así,

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 3x) + 2 \\ &= 2(x^2 + 3x + \tfrac{9}{4}) + 2 - \tfrac{9}{2} \\ &= 2(x + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Claramente, $y$ alcanza su valor mínimo $-\frac{5}{2}$ cuando $x = -$ cualquier otro valor de $x$ da para la función un número positiv sumado a $-\frac{5}{2}$. Por tanto, las coordenadas del punto mínimo d la gráfica (Fig. 8-4) son $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

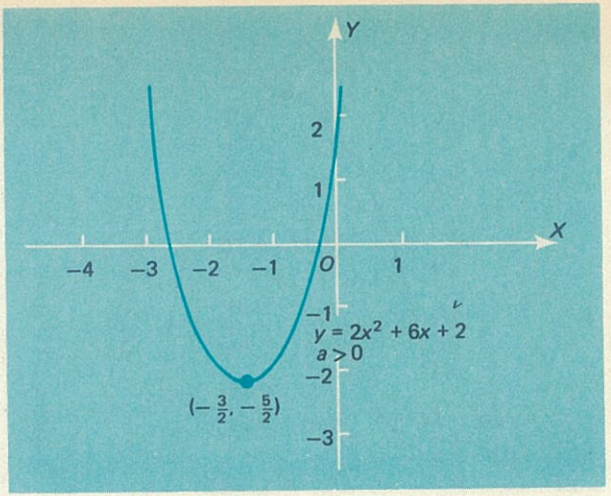



*Figura 8-4*

EJEMPLO 2. Encontremos el valor máximo de la función definida por la ecuación $y = -3x^2 - 12x + 6$.

*Solución.* Restando y sumando 12 al miembro derecho, tenemos

$$y = -3(x^2 + 4x + 4) + 6 + 12$$
$$= -3(x + 2)^2 + 18$$

Puesto que la expresión $-3(x + 2)^2$ nunca es positiva, la función tiene su valor máximo cuando la expresión se iguala a cero. Por tanto, escribimos $x = -2$ y obtenemos $y = 18$, que es el valor máximo de la función. Las coordenadas del punto mínimo de la gráfica (Fig. 8-5) son $(-2, 18)$.

EJEMPLO 3. Encontremos el área del máximo lote rectangular que puede ser cercado a lo largo de tres lados con 160 m de cerca.

*Solución.* Si $x$ metros es la anchura del rectángulo, entonces $160 - 2x$ metros es la longitud. Si $y$ representa al área en metros cuadrados, tenemos

$$y = 160x - 2x^2$$
$$= -2(x^2 - 80x + 1600) + 3200$$
$$= -2(x - 40)^2 + 3200$$

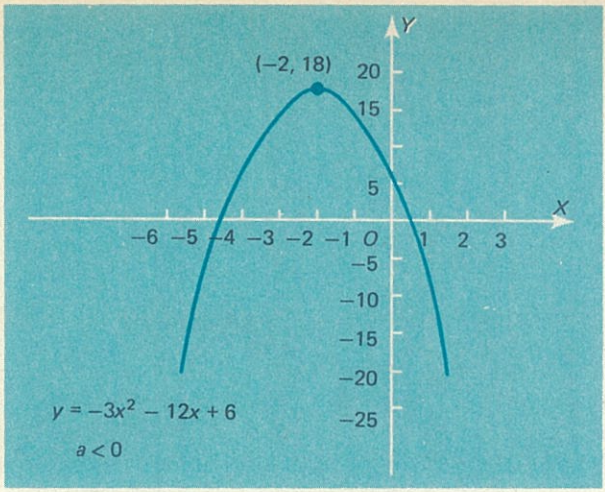



*Figura 8-5*

El área máxima, obtenida cuando $x = 40$, es 3 200 m². Las dimensiones del lote máximo son 40 m por 80 m. La gráfica (Fig. 8-6) exhibe el hecho de que el dominio y el rango de la función surgida en este problema son, respectivamente, los conjuntos

$$\{x|0 < x < 80\} \quad \text{y} \quad \{y|0 < y \leq 3\,200\}$$

Para trazar una parábola, lo mejor es localizar el vértice, como lo hemos hecho en los ejemplos precedentes. Ya entonces con dos o tres puntos adicionales puede trazarse una gráfica razonable.

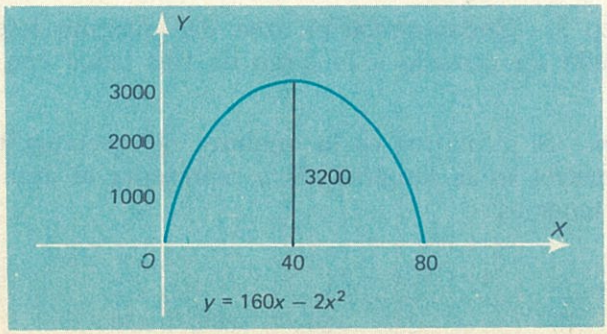



*Figura 8-6*

## *EJERCICIO 8-6*

Encuentre las coordenadas del punto mínimo y máximo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. Con ayuda de la gráfica dé usted (o estime) los ceros reales, si los hay, de la función.

1. $y = x^2 - 8x + 10$
2. $y = x^2 + 4x + 3$
3. $y = 1 - 6x - x^2$
4. $y = 4 + 8x - x^2$
5. $y = 4x^2 + 4x + 1$
6. $y = 2x^2 - 3x + 2$
7. $y = 9 - 6x - x^2$
8. $y = -2x^2 + 2x - 5$
9. $y = 3x^2 - 3x - 4$
10. $y = -6x^2 + 4x + 3$

11. ¿Cuáles son las dimensiones del máximo campo rectangular que puede ser cercado con 440 m de cerca?
12. Separe al número 18 en dos partes tales que el producto de las partes sea máximo.
13. Un lote rectangular ha de ser cercado en todo su perímetro y dividido por una cerca interior paralela a dos de los lados. Encuentre el área máxima posible del lote si la longitud total de la cerca debe ser 300 m.
14. Encuentre dos números cuya suma es 56 y la suma de sus cuadrados es mínima.
15. Si 20 niños asisten a una fiesta, el valor del boleto será de 50 cts. Si asisten 21 niños el precio será de 49 cts por boleto; si asisten 22 niños, 48 cts por boleto; si asisten 23 niños el precio será de 47 cts por boleto; y así sucesivamente. ¿Cuál será, en este arreglo, la asistencia que deje mayores ganancias?

## *EJERCICIOS DE REVISION*

Resuelva las ecuaciones siguientes en $x$ por el método de factorización (Sec. 8-1).

1. $2x^2 - x - 3 = 0$
2. $3x^2 - x - 2 = 0$
3. $4x^2 - 11x - 3 = 0$
4. $3x^2 - 7x - 2 = 0$
5. $9x^2 - 3x - 2 = 0$
6. $5x^2 - 17x + 6 = 0$
7. $x^2 + (2b - 2a)x - 4ab = 0$
8. $a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

Resuelva las ecuaciones completando el cuadrado y verifique (Sec. 8-2).

9. $x^2 - x - 20 = 0$
10. $x^2 + 7x + 12 = 0$
11. $x^2 - x - 30 = 0$
12. $2x^2 + 5x - 2 = 0$
13. $6x^2 + 5x + 1 = 0$
14. $x^2 + 2x + 1 = 0$
15. $2x^2 - 4x + 1 = 0$
16. $9x^2 + 24x + 11 = 0$
17. $x^2 - 6x + 13 = 0$
18. $x^2 + 8x + 25 = 0$

Resuelva por medio de la fórmula cuadrática y verifique (Sec 8-3).

19. $2x^2 + 3x - 2 = 0$
20. $x^2 + 8x + 15 = 0$
21. $3x^2 - x - 2 = 0$
22. $3x^2 - 2x - 5 = 0$
23. $20x^2 - 9x + 1 = 0$
24. $2x^2 - 5x + 1 = 0$
25. $8x^2 + 10x + 1 = 0$
26. $11x^2 - 20x + 8 = 0$
27. $9x^2 + 10x + 2 = 0$
28. $7x^2 + 13x + 7 = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones (Sec. 8-3).

29. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
30. $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$
31. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
32. $3x^4 - 5x^2 - 12 = 0$
33. $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$
34. $x - 2x^{1/2} - 8 = 0$
35. $x - 3x^{1/2} - 10 = 0$
36. $x^{2/3} + 7x^{1/3} + 12 = 0$
37. $2x^{-2} - x^{-1} - 1 = 0$
38. $4x^{-2} + x^{-1} - 5 = 0$
39. $x^{4/3} - 10x^{2/3} + 9 = 0$
40. $x^{1/2} + 2x^{-1/2} + 3 = 0$
41. $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
42. $(x^2 + 3x)^2 - 3(x^2 + 3x) + 2 = 0$
43. $\left(\frac{2}{x+1}\right)^2 + 7\left(\frac{2}{x+1}\right) - 30 = 0$
44. $5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2 = 0$
45. $4x^2 - 3x + \frac{5}{4x^2 - 3x} + 6 = 0$
46. $\frac{x^2 - 3}{x + 1} - 2\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right) - 1 = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones. Verifique sus resultados (Sec. 8-4).

47. $\sqrt{x^2 - 8} = 1$
48. $\sqrt{x^2 + 9} = 5$
49. $\sqrt{6x + 7} = x$
50. $\sqrt{2x - 5} = x - 4$
51. $\sqrt{1 - x} = x + 1$
52. $\sqrt{3x + 11} = -2$
53. $\sqrt{1 - 5x} + \sqrt{3 - 3x} = 0$
54. $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{2x + 2} = 0$
55. $\sqrt{2x + 11} - 1 = \sqrt{x + 9}$
56. $3 - \sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 5} = 0$
57. $\sqrt{4x + 5} = \sqrt{6x + 6} - 1$
58. $\sqrt{2x - 7} - 1 = \sqrt{x - 4}$
59. $\sqrt{3x + 3} = 2\sqrt{2x} - \sqrt{x - 1}$
60. $\sqrt{6x + 6} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3x + 1}$
61. $2\sqrt{2x - 2} - \sqrt{3x} = \sqrt{4 - x}$
62. $3\sqrt{x - 6} + \sqrt{x - 10} = 2\sqrt{x - 1}$
63. $\sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{7x - 12}$
64. $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{2x - 9} = \sqrt{7x + 1}$
65. $\sqrt{3x} + \sqrt{2x} + 1 = \sqrt{10x + 1}$
66. $\sqrt{9 - 2x} - \sqrt{4 - x} = \sqrt{5 - x}$
67. $1 - \sqrt{x^2 - x + 2} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$
68. $\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{x^2 - 3x - 2}$

Muestre que la gráfica de la ecuación

$$x = ay^2 + by + c$$

es una parábola con vértice en el punto

$$\left(\frac{4ac - b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

Muestre también que la parábola se extiende a la derecha del vértice si $a > 0$, y a la izquierda si $a < 0$.

Encuentre las coordenadas del vértice de la parábola definida por cada ecuación. Marque dos o tres puntos más de la parábola y bosquéjelas (Secs. 8-7 y 8-8).

69. $x = y^2 + 8y + 12$
70. $x = y^2 - 4y + 4$
71. $x = -y^2 + 6y - 7$
72. $x = -y^2 + 2y + 1$
73. $x = 4y^2 - 4y + 2$
74. $x = 2y^2 - 4y + 3$
75. $x = 3y^2 + 3x + 1$
76. $x = -4y^2 - 8y + 1$

Capítulo 9

# SISTEMAS QUE ENVUELVEN ECUACIONES CUADRATICAS

## 9-1. LA GRAFICA DE UNA ECUACION CUADRATICA EN $x$ Y $y$

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

donde $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ y $F$ son constantes, no siendo $A$, $B$ y $C$ todos nulos, es llamada una *ecuación cuadrática* en las variables $x$ y $y$. La gráfica de una ecuación de esta especie es llamada una *sección cónica*. Este nombre proviene del hecho de que puede obtenerse una curva idéntica mediante la intersección de un plano con un cilindro circular recto. Construir la gráfica de una ecuación de la forma (1) con todos los términos que ahí se presentan es un trabajo tedioso. Sin embargo, consideraremos algunos casos especiales de la ecuación cuyas gráficas pueden trazarse sin gran dificultad.

En la Sec. 8-7 hemos construido gráficas que llamamos parábolas, de ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Una ecuación de esta forma puede obtenerse de la Ec. (1) asignando a $B$ y $C$ el valor cero y resolviendo para $y$. De manera semejante, la ecuación

$$x = ay^2 + by + c$$

es un caso especial de la Ec. (1). La gráfica de una ecuación de esta forma es una parábola que se extiende desde un punto extremo izquierdo (vértice) hacia la derecha si $a > 0$, y desde un punto más lejano situado a la derecha hacia la izquierda si $a < 0$ (véase la Fig. 9-5).

Consideraremos después algunos otros casos especiales de ecuaciones cuadráticas en $x$ y $y$ cuyas gráficas, como la parábola, son secciones cónicas a las cuales daremos nombres distinguidos. Damos aquí una lista de los pasos involucrados en el proceso de graficar.

1. Resolver la ecuación para $y$ en términos de $x$.
2. Asignar valores a $x$ y calcular los valores correspondientes de $y$.
3. Marcar los puntos así determinados y trazar una curva suave que los contenga.

Si es más fácil resolver para $x$ en términos de $y$, intercambiar $x$ y $y$ en las instrucciones precedentes.

**Círculo.** La gráfica de una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es un círculo de radio $r$ con centro en el origen. Que la gráfica es un círculo puede verse refiriéndose a la Fig. 9-1. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, las coordenadas de cualquier punto del círculo satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Por lo tanto, la gráfica de $x^2 + y^2 = 36$, es un círculo de radio 6 y centro en el origen.

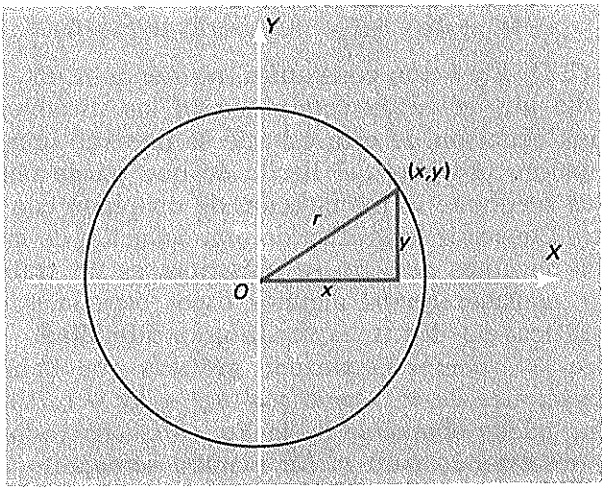



*Figura 9-1*

**Elipse.** La gráfica de una ecuación de la forma

$$ax^2 + by^2 = c$$

con $a, b, c > 0$ y $a \neq b$ es llamada una *elipse*.

EJEMPLO 1. Construyamos la gráfica de la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$.

*Solución.* Resolviendo para $y$ en términos de $x$ y para $x$ en términos de $y$, tenemos

$$y = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \quad \text{y} \quad x = \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}$$

De la primera ecuación vemos que si $x^2 > 9$, el radicando es negativo y, por lo tanto, $y$ es imaginario. Esto significa, en lo que a graficar se refiere, que $x$ puede tomar tan sólo valores entre $-3$ y 3, inclusive. Y la segunda ecuación revela que $y$ está restringida a valores entre $-2$ y 2. Eligiendo la primera ecuación, preparamos una tabla de valores correspondientes para $x$ y $y$. La gráfica trazada por los puntos así determinados se muestra en la Fig. 9-2.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $\pm 1.5$ | $\pm 2$ | $\pm 1.5$ | 0 |

**Hipérbola.** La gráfica de una ecuación de la forma

$$ax^2 - by^2 = c \quad \text{o} \quad ay^2 - bx^2 = c$$

donde $a$, $b$ y $c$ son constantes positivas es llamada una *hipérbola*.

EJEMPLO 2. Tracemos la gráfica de la ecuación $16x^2 - 9y^2 = 144$.

*Solución.* Resolviendo para $y$, obtenemos

$$y = \pm\tfrac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$$

Observamos que $y$ es imaginario para valores de $x$ entre $-3$ y 3. Por lo tanto, la gráfica consiste en dos *ramas*, una que comienza en (3, 0) y se extiende hacia la derecha y la otra que se extiende hacia la izquierda desde $(-3, 0)$. La gráfica, trazada usando estas parejas de valores de la tabla, aparece en la Fig. 9-3.

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\pm 5.3$ | $\pm 3.5$ | 0 | 0 | $\pm 3.5$ | $\pm 5.3$ |

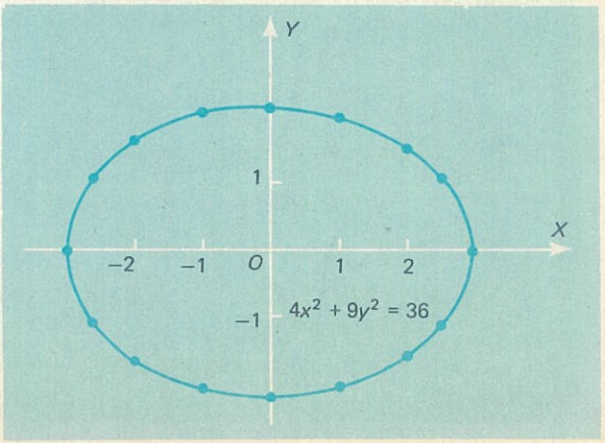



*Figura 9-2*

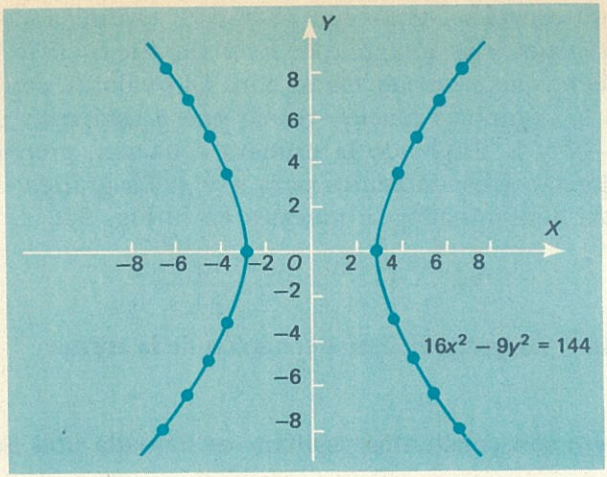



*Figura 9-3*

La gráfica de $ay^2 - bx^2 = c$, donde $a$, $b$ y $c$ son constantes positivas, tiene una sola rama que se abre hacia arriba y otra que se abre hacia abajo; esto queda ilustrado en la Fig. 9-6.

EJEMPLO 3. Tracemos la gráfica de la ecuación $xy = 4$.

*Solución.* En esta ecuación $x$ puede tener cualquier valor exceptuando cero. Cuando $x = 0$, no hay valor para $y$ que haga el producto $xy$ igual a 4. La gráfica es una hipérbola que comprende las dos ramas trazadas en la Fig. 9-4.

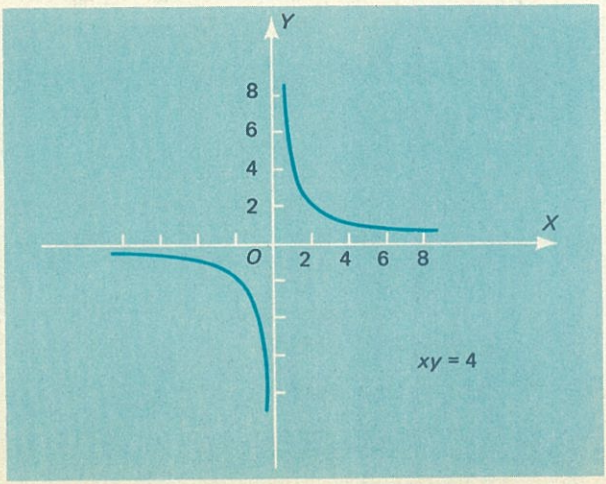



*Figura 9-4*

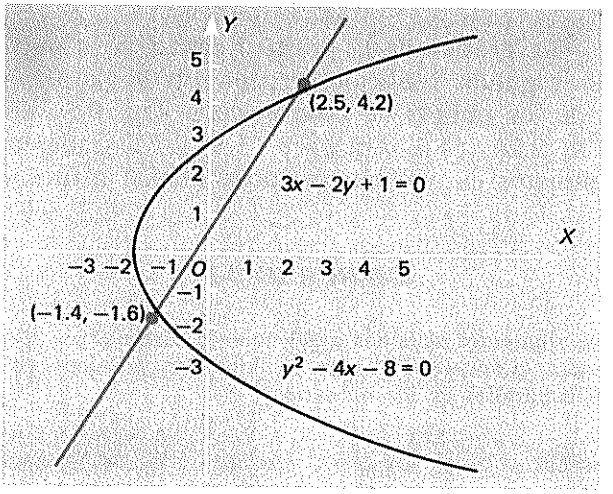



*Figura 9-5*

## 9-2. SOLUCION DE UN SISTEMA CUADRATICO MEDIANTE GRAFICAS

En la Sec. 6-5 resolvimos sistemas de ecuaciones lineales graficando cada ecuación de un sistema y leyendo las coordenadas del punto de intersección. El mismo procedimiento puede aplicarse a ecuaciones de segundo grado. Sin embargo, las gráficas no están restringidas a ser líneas rectas, y puede haber más de un punto de intersección. Este proceso no nos da las raíces imaginarias y tan sólo nos sirve para encontrar aproximaciones a las raíces reales.

EJEMPLO 1. Resolvamos gráficamente el sistema de ecuaciones

$$3x - 2y + 1 = 0$$

$$y^2 - 4x - 8 = 0$$

*Solución.* La gráfica de la primera ecuación es una linea recta, y la gráfica de la segunda es una parábola. Las gráficas de las ecuaciones se muestran en la Fig. 9-5. Hay dos puntos de intersección, cuyas coordenadas estimamos como $(-1.4, -1.6)$ y $(2.5, 4.2)$. Estas parejas de valores son buenas aproximaciones a las soluciones, como puede verificarse por sustitución en las ecuaciones dadas.

EJEMPLO 2. Resolvamos gráficamente el sistema de ecuaciones

$$4y^2 + 9x^2 = 36$$

$$9y^2 - 4x^2 = 36$$

*Solución.* La gráfica de la primera ecuación es una elipse, y la gráfica de la segunda ecuación es una hipérbola. Estimamos las coordenadas de los puntos de intersección (Fig. 9-6) como $(-1.4, -2.2)$, $(-1.4, 2.2)$, $(1.4, -2.2)$ y $(1.4, 2.2)$. Cada una de estas parejas de números es una buena aproximación a una solución del sistema.

### *EJERCICIO 9-1*

**Resuelva los siguientes sistemas gráficamente. Estimar los resultados hasta el primer decimal. (Consulte la Tabla de Potencias y Raíces, en la Pág. 379, para las raíces cuadradas de los números.)**

1. $x^2 - 4y = 0$
   $x - y = 0$
2. $y^2 - 3x = 0$
   $x + y = 1$
3. $xy - 12 = 0$
   $x - 2y = 2$
4. $x^2 + y^2 = 25$
   $y - x = 1$
5. $2x^2 + y^2 = 9$
   $x - y = 1$
6. $x^2 + y^2 = 8$
   $x^2 + 4y^2 = 16$
7. $x^2 + y^2 = 10$
   $xy - 4 = 0$
8. $x^2 - y^2 = 8$
   $x^2 + 2y^2 = 14$
9. $2x^2 + y^2 = 18$
   $x^2 + 2y^2 = 33$
10. $4y^2 - x^2 = 16$
    $2xy - 15 = 0$
11. $2x^2 + 3y^2 = 20$
    $y = x^2 - 2$
12. $x^2 + y^2 = 16$
    $x^2 = 2y + 8$

## 9-3. SOLUCION POR METODOS ALGEBRAICOS

Cualesquiera dos ecuaciones cuadráticas independientes en dos variables pueden resolverse por métodos algebraicos. Un método algebraico proporciona los valores exactos de todas las soluciones, incluyendo las reales y las imaginarias. Sin embargo, un método algebraico general conduce a una ecuación de cuarto grado en una

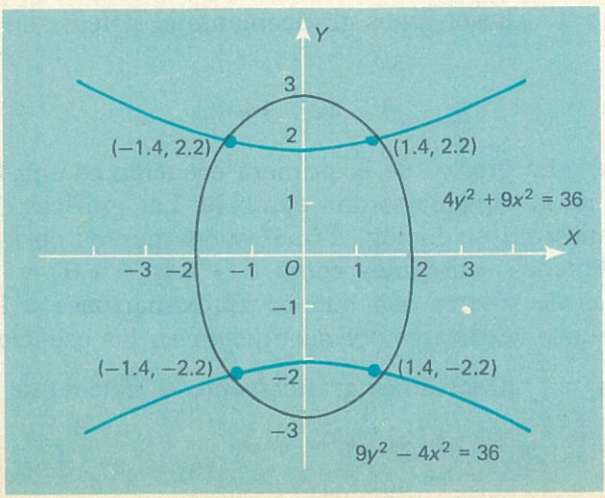



*Figura 9-6*

de las dos variables. Aunque una ecuación de este tipo puede ser resuelta para obtener sus raíces exactamente, el proceso no es sencillo. En consecuencia, consideraremos ciertos sistemas cuadráticos especiales que pueden ser resultos mediante procesos que ya hemos discutido.

## 9-4. UN SISTEMA SIN TERMINO $xy$ NI TERMINOS DE PRIMER GRADO

Si ambas ecuaciones de un sistema son de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

podemos emplear uno de los métodos para resolver dos ecuaciones lineales en dos variables (Sec. 6-6). Si tratamos a las ecuaciones como ecuaciones lineales en $x^2$ y $y^2$, se pueden encontrar los valores de los cuadrados de las variables. Entonces las variables $x$ y $y$ se obtienen tomando raíces cuadradas.

EJEMPLO. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$4x^2 + 3y^2 = 24$$
$$3x^2 - 2y^2 = 35$$

*Solución.* Multiplicamos los miembros de la primera ecuación por 2 y los de la segunda por 3 para obtener

$$\begin{array}{rrr} 8x^2 + & 6y^2 = & 48 \\ 9x^2 - & 6y^2 = & 105 \\ \hline & 17x^2 = & 153 \end{array}$$

$$x = \pm 3$$

Entonces, sustituyendo este valor de $x$ en $4x^2 + 3y^2 = 24$, obtenemos

$$36 + 3y^2 = 24$$
$$3y^2 = -12$$
$$y = \pm 2i$$

Apareando los valores para $x$ y $y$, tenemos

$$(3, 2i), (3, -2i), (-3, 2i), (-3, -2i)$$

Estas soluciones no son reales, y, por consiguiente, las gráficas de las ecuaciones dadas (Fig. 9-7) no se intersectan. Estas parejas de valores, sin embargo, satisfacen cada una de las ecuaciones dadas.

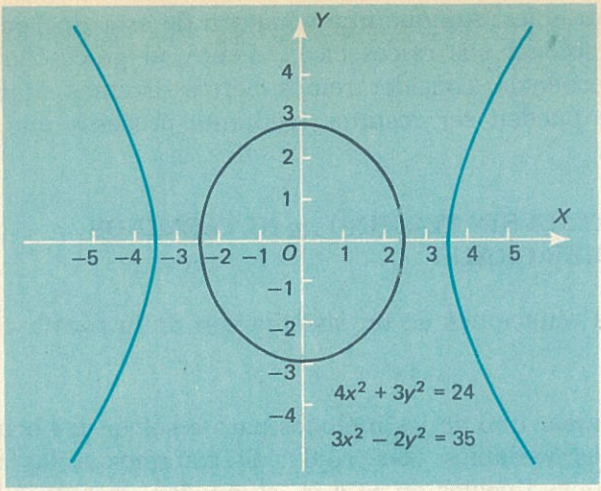



*Figura 9-7*

## 9-5. UN SISTEMA CON UNA ECUACION LINEAL Y UNA CUADRATICA

Si un sistema tiene una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, las soluciones pueden obtenerse rápidamente. El proceso consiste en resolver la ecuación lineal para una de sus incógnitas en términos de la otra y sustituir entonces en la ecuación cuadrática. Este paso conduce a una ecuación cuadrática en una incógnita. Ilustremos el procedimiento.

EJEMPLO. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$x^2 - xy + y^2 - 7 = 0$$
$$x - 2y + 1 = 0$$

*Solución.* Resolviendo la ecuación lineal para $x$ y sustituyendo el resultado en la ecuación cuadrática, obtenemos

$$(2y - 1)^2 - y(2y - 1) + y^2 - 7 = 0$$
$$3y^2 - 3y - 6 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $y = -1$ y $y = 2$. Los valores correspondientes para $x$, obtenidos de la ecuación lineal dada, son $x = -3$ y $x = 3$. Por lo tanto, las parejas de números $(-3, -1)$ y $(3, 2)$ son las soluciones de las ecuaciones dadas.

### *EJERCICIO 9-2*

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y verifique sus resultados.

1. $x^2 + y^2 = 25$
   $x^2 - y^2 = 7$
2. $x^2 - y^2 = 11$
   $3x^2 - 2y^2 = 58$
3. $2x^2 + 3y^2 = 23$
   $3x^2 - 2y^2 = 15$
4. $4y^2 - 3x^2 = 29$
   $y^2 + 7x^2 = 46$
5. $5x^2 + 2y^2 = 37$
   $x^2 + y^2 = 5$
6. $6x^2 - 11y^2 = 38$
   $5x^2 - 9y^2 = 31$
7. $8x^2 + 3y^2 = 2$
   $5x^2 - 4y^2 = 13$
8. $5y^2 - 6x^2 = 43$
   $4y^2 - 5x^2 = 35$
9. $4x^2 + 5y^2 = 21$
   $3x^2 + 4y^2 = 16$
10. $x^2 - y = 5$
    $2x + y = 3$
11. $y^2 + 2x = 7$
    $x - 2y = -7$
12. $3x^2 + 2y^2 = 25$
    $x + y = 5$
13. $x^2 + y^2 = 1$
    $2x - y = 4$
14. $x^2 + y^2 = 20$
    $3x - y = 2$
15. $xy + x - y = 13$
    $4x - 3y - 7 = 0$
16. $x^2 - xy + y^2 - 5 = 0$
    $3x - 2y - 5 = 0$
17. $x^2 - 3xy - 2y^2 - 2 = 0$
    $x - y - 2 = 0$
18. $x^2 + 2xy - 2y^2 - 3 = 0$
    $x - 2y - 3 = 0$
19. $y^2 - 4xy - 4y + 8x + 3 = 0$
    $4x - 2y - 3 = 0$
20. $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 23$
    $x - y - 2 = 0$
21. $x^2 + xy - 2y^2 - 3y = 1$
    $x - 2y - 1 = 0$

## 9-6. UN SISTEMA SIN TERMINOS DE PRIMER GRADO

Si ambas ecuaciones de un sistema son de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

donde la constante $F$ no es nula, pueden combinarse para obtener dos ecuaciones lineales. Las ecuaciones lineales provendrán de la eliminación de los términos constantes de las ecuaciones dadas. Si $F = 0$ en una de las dos ecuaciones dadas, el miembro izquierdo de la ecuación puede factorizarse para dar dos ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$5x^2 - 2xy - y^2 = 2$$
$$2x^2 + xy - 2y^2 = 1$$

*Solución.* Multiplicando los miembros de la segunda ecuación por 2 y sustrayendo de la primera, obtenemos

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \quad \text{o} \quad (x - y)(x - 3y) = 0$$

De la última ecuación obtenemos las ecuaciones lineales $x - y = 0$ y $x - 3y = 0$, cada una de las cuales puede asociarse con cualquie-

ra de las ecuaciones dadas para formar un sistema. Así, tenemos los sistemas

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - 2y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x^2 + xy - 2y^2 = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas pueden resolverse por el método de la sección precedente. Las soluciones son, respectivamente,

$$(1, 1), (-1, -1) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3\sqrt{19}}{19}, \frac{\sqrt{19}}{19}\right), \left(-\frac{3\sqrt{19}}{19}, -\frac{\sqrt{19}}{19}\right)$$

EJEMPLO 2. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$5x^2 + 2xy - y^2 = 3$$
$$2x^2 - xy - y^2 = 0$$

*Solución.* Factorizando, expresamos la segunda ecuación en la forma $(2x + y)(x - y) = 0$. Igualando cada factor a cero, tenemos las ecuaciones lineales $2x + y = 0$ y $x - y = 0$, cada una de las cuales será asociada con la primera ecuación dada para obtener los sistemas

$$\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas tienen las siguientes soluciones:

$$(i, -2i), (-i, 2i); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Cada una de estas parejas de números puede verse que satisfacen las ecuaciones dadas. Sustituyendo $x = i$ y $y = -2i$ en los miembros derechos de las ecuaciones, obtenemos

$$5(i)^2 + 2(i)(-2i) - (-2i)^2 = -5 + 4 + 4 = 3 \qquad \text{verificar}$$
$$2(i)^2 - (i)(-2i) - (-2i)^2 = -2 - 2 + 4 = 0 \qquad \text{verificar}$$

A manera de ejercicio, el estudiante debe verificar para cada una de las otras parejas de números.

## *EJERCICIO 9-3*

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones

1. $2x^2 - xy = 6$
   $x^2 - y^2 = 3$
2. $x^2 - 2xy - 2y^2 = 1$
   $2x^2 + xy + y^2 = 2$
3. $5x^2 + 2xy + y^2 = 16$
   $4x^2 + 4xy = -16$
4. $3x^2 - 5xy - 4y^2 = 8$
   $x^2 - 2xy - y^2 = 2$

5. $2x^2 - 2xy - 3y^2 = -7$
$x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$

6. $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4$
$4x^2 - 6xy + 3y^2 = 4$

7. $x^2 - xy - y^2 = 5$
$2x^2 + 2xy + y^2 = 10$

8. $3x^2 - 3xy + y^2 = 7$
$x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$

9. $2xy + y^2 = 0$
$x^2 - 3xy + 2y^2 = 15$

10. $4x^2 - 5xy - 6y^2 = 0$
$3x^2 - 3xy - 5y^2 = 9$

11. $2x^2 + xy + y^2 = 16$
$2x^2 + 7xy + 6y^2 = 0$

12. $x^2 + 2xy - y^2 = 14$
$5x^2 - 26xy + 5y^2 = 0$

13. $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0$
$x^2 + 2xy - 5y^2 = -1$

14. $5x^2 + 3xy - 2y^2 = 34$
$3x^2 + 8xy - 3y^2 = 0$

15. Muestre que las sustituciones $x = u + v$ y $y = u - v$ reducen el sistema

$$x^2 + B_1xy + y^2 + D_1x + D_1y + F_1 = 0$$

$$x^2 + B_2xy + y^2 + D_2x + D_2y + F_2 = 0$$

a

$$(2 - B_1)v^2 + (2 + B_1)u^2 + 2D_1u + F_1 = 0$$

$$(2 - B_2)v^2 + (2 + B_2)u^2 + 2D_2u + F_2 = 0$$

Observe ahora que el nuevo sistema puede resolverse eliminando en primer lugar $v^2$ para obtener una ecuación cuadrática en $u$. Y entonces $x$ y $y$ pueden encontrarse fácilmente, dando así las soluciones del sistema original.

Use la información del Prob. 15 y resuelva los siguientes sistemas.

16. $x^2 + y^2 - 10 = 0$
$xy + x + y - 7 = 0$

17. $x^2 + y^2 - x - y - 4 = 0$
$2xy - 3x - 3y + 4 = 0$

18. $x^2 + y^2 - 10x - 10y = -40$
$xy - 5x - 5y + 22 = 0$

19. $x^2 + y^2 + xy + 3x + 3y = 18$
$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 15$

En los siguientes problemas establezca un sistema de dos ecuaciones en dos cantidades desconocidas. Resuelva el sistema y verifique sus resultados.

20. La suma de dos números es 16; la suma de sus cuadrados es 130. Encuentre los números.

21. El perímetro de un rectángulo es 40, y el área es 96. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

22. Un rectángulo tiene 14 unidades de longitud más que de ancho, y la diagonal es de 34 unidades. Encuentre las longitudes de los lados.

23. Un triángulo isósceles tiene 36 unidades de perímetro y una altura de 12. Encontrar la longitud de los lados.

24. La diagonal de una caja rectangular cerrada mide 6 plg y el área superficial total es de 64 plg$^2$. Encontrar las dimensiones de la caja si la base es cuadrada.

25. El área impresa de un desplegado rectangular es de 704 plg$^2$. El área impresa más los márgenes dan una área total de 1 200 plg$^2$. Encuentre las dimensiones del desplegado si cada uno de los cuatro márgenes tiene 4 plg de ancho.

26. Una lámina rectangular tiene una área de 144 plg$^2$. Se corta un cuadrado en cada una de las esquinas y se confecciona una caja levantando los lados.

Encontrar las dimensiones de la lámina si la caja tiene un volumen de 120 $plg^3$.

27. Un grupo de niños rentó una pista de patinar por $24. Más tarde se unen a estos niños otros 10 y con esto se reduce el costo per cápita en 20 centavos. Encuentre el costo per cápita y el número total de niños.
28. Una alberca se llena por medio de dos tuberías que tardan en hacerlo 8 hr. La tubería más grande puede llenar la alberca en 12 hr menos que la más pequeña. Encuentre el tiempo requerido por cada una de las tuberías para llenar la alberca.
29. Un automóvil deja la población *A* y viaja con velocidad uniforme a la población *B*. Un segundo automóvil, viajando a razón de 20 mi/hr más rápido que el primero se desplaza de *B* a *A*. Los dos automóviles arrancan al mismo tiempo y se encuentran al cabo de una hora, y uno de los autos puede hacer el viaje en 50 min menos que el otro. Encuentre la velocidad de cada automóvil y la distancia entre las dos poblaciones.
30. Tres aeroplanos despegan al mismo tiempo de cierto aeropuerto y viajan directamente a otro aeropuerto. El primer aeroplano viaja a 40 mi/hr más rápido que el segundo y cubre el trayecto en 40 min menos. El tercer aeroplano viaja a 40 mi/hr más lentamente que el segundo y consume una hora más que el segundo. Encuentre la velocidad del segundo aeroplano y la distancia entre los aeropuertos.
31. El señor Smith ha vendido un terreno de cierta área y precio por acre por un total de $5 000. También ha vendido otro campo mayor que el primero en 25 acres y a un precio por acre que es $200 menos que el correspondiente para el primero. Si la segunda venta le produce $10 500 encuentre el área y el precio por acre del primer campo.
32. En una de las esquinas de un campo rectangular se va a construir un granero de 40 por 60 pies. Si se dispone de 300 pies de barda y el área, incluyendo la del granero, es 10 000 pies cuadrados, encuentre las dimensiones del lote.
33. El área impresa de una página debe ser de 36 $plg^2$. Los márgenes superior e inferior son cada uno de 1½ plg y los laterales de 1 plg. Encuentre las dimensiones de la página si el área es de 80 $plg^2$.
34. Un terreno rectangular contiene 5 acres (800 varas cuadradas). Un lado del terreno bordea un río, y por lo tanto, no requiere barda. Encuentre las dimensiones del rectángulo si la longitud de la barda es de 350 varas.
35. El señor Hart ha vendido un lote de trigo en un cierto precio por bushel. Algunos días más tarde cuando el precio ha aumentado en $2 por bushel vendió un lote mayor que el primero en 500 bushels. Si las dos ventas le produjeron $10 500, ¿cuánto trigo se vendió en total y cuál fue el precio por bushel en la primera venta?
36. El señor Grant vendió dos lotes cuadrados de terreno por $24 000, a $200 por acre por el primero y a $100 por acre por el segundo. El segundo terreno le produjo $8 000 más que el primero, y el total formado por las dos áreas es 200 acres. Encuentre la longitud del lado de cada uno de los dos cuadrados. (Un acre es igual a 160 varas cuadradas.)
37. Una escalera de 25 pies está apoyada contra la pared de un edificio en un punto a 30 pies del suelo y pasando por encima de la pared toca la parte superior de una barda de 9 pies de alto paralela al muro. Si el pie de

la escalera está a 40 pies de la base del edificio, encuentre la distancia desde el pie de la escalera, desde la parte baja de la barda y la distancia entre la barda y el edificio.

38. Un prado rectangular de 504 pies cuadrados está rodeado por un camino de 4 pies de ancho. Si el área del camino es de 360 pies cuadrados, encuentre las dimensiones del prado.
39. La diagonal de un rectángulo tiene 8 plg más que uno de los lados, y 4 plg más que el otro lado. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

# Capítulo 10

# DESIGUALDADES

## 10-1. LOS AXIOMAS DE ORDEN

En el Cap. 2 hemos introducido un conjunto de elementos indefinidos $R$, llamados números reales, que poseen las propiedades concretadas en los seis axiomas de campo (Sec. 2-2). Los números reales, que satisfacen a los axiomas de campo, se dice que forman un campo. Atribuimos ahora propiedades adicionales al conjunto $R$ requiriendo que este conjunto satisfaga a los llamados *axiomas de orden*. Los símbolos de orden son y se describen como sigue:

$a < b$ significa "$a$ es menor que $b$"
$a > b$ significa "$a$ es mayor que $b$"

**Axioma 7.** *El axioma de tricotomía.* Si $a$ y $b \in R$, entonces una y sólo una de las siguientes relaciones es válida:

$$a < b \quad a = b \quad a > b$$

**Axioma 8.** *El axioma de transitividad.* Si $a$, $b$ y $c \in R$ tal que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

**Axioma 9.** *El axioma de adición.* Si $a$, $b$ y $c \in R$ tales que $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

**Axioma 10.** *El axioma de multiplicación.* Si $a$, $b$ y $c \in R$ tales que $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

**Definición 10-1.** Un campo que satisface los axiomas de orden es llamado un campo *ordenado*.

**Definición 10-2.** Si $a$ y $b \in R$, entonces $a < b$ si y sólo si $b > a$.

**Definición 10-3.** Un número real $a$ es positivo si $a > 0$ y negativo si $a < 0$.

**Definición 10-4.** El enunciado de que una cantidad es mayor que o menor que otra cantidad es llamado una *desigualdad.*

Escribiendo $b = 0$ en el Axioma 7, se concluye que $a < 0$, $a = 0$, o $a > 0$. De este hecho y de la Definición 10-3, concluimos que 0 no es positivo ni negativo.

Algunas veces es conveniente combinar una igualdad con una desigualdad. Así

$a \leq b$ significa "$a$ es menor que o igual a $b$"
$a \geq b$ significa "a es mayor que o igual a $b$"

Por ejemplo, $a \leq 0$ significa que $a$ no es positivo, y $a \geq 0$ significa que $a$ no es negativo. Es claro que si ambos enunciados fuesen válidos simultáneamente, entonces $a = 0$.

Hay una gran variedad de teoremas útiles que comprenden desigualdades. Demostraremos algunos teoremas que serán usados después y enunciaremos otros teoremas que el estudiante puede demostrar. Si llega a faltar la razón por la cual se toma cierto paso en la demostración de un teorema, se sugiere que el estudiante encuentre la razón que justifica dicho paso.

**Teorema 10-1.** Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.

*Demostración.*

| | |
|---|---|
| $a > 0$ | dato |
| $a + b > 0 + b = b$ | Axioma 9 |
| $b > 0$ | dato |
| $a + b > 0$ ■ | Axioma 8 |

**Teorema 10-2.** Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$.

Estos teoremas nos dicen que la suma, o el producto, de dos números positivos es positivo. En las Secs. 3-2 y 3-3, supusimos estas propiedades de cerradura para la adición y multiplicación de números positivos. Procedimos entonces a demostrar que el producto (o cociente) de dos números de signos iguales es positivo y el producto (o cociente) de dos números de signos diferentes es negativo.

**Teorema 10-3.** Si $a$ y $b \in R$, entonces $a > b$ si y sólo si $-a < -b$.

*Demostración.* Primero demostraremos que si $a > b$, entonces

dato

$$a + [(-a) + (-b)] > b + [(-a) + (-b)] \qquad \text{Axioma 9}$$

$$-b > -a$$

$$-a < -b \ \blacksquare \qquad \text{Definición 10-2}$$

Necesitamos ahora demostrar que si $-a < -b$, entonces $a > b$. Los pasos en la primera parte de la demostración son reversibles. Por lo tanto, la demostración consistirá en comenzar con $-a < -b$ y reescribir las desigualdades en orden inverso hasta $a > b$.

**Corolario.** Si $a > 0$, entonces $-a < 0$; y si $-a < 0$, entonces $a > 0$.

**Teorema 10-4.** Sea $a$, $b$ y $c \in R$ con $a > b$ y $c < 0$. Entonces se concluye que $ac < bc$.

*Demostración.* Puesto que $c < 0$, concluimos del corolario precedente que $-c > 0$. Entonces tenemos

$$a > b \qquad \text{dato}$$

$$-ac > -bc \qquad \text{Axioma 10}$$

$$ac < bc \qquad \text{Teorema 10-3}$$

El Axioma 10 nos dice que ambos miembros de una desigualdad pueden ser multiplicados por un número positivo si el *sentido* (dirección hacia la cual apunta el signo de desigualdad) de la desigualdad permanece inalterado. Y el Teorema 10-4 nos dice que el sentido debe ser cambiado si el multiplicador es un número negativo.

**Teorema 10-5.** Si $a$, $b$, $c$ y $d \in R$ con $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

*Demostración.*

$$a > b \quad \text{y} \quad c > d \qquad \text{dato}$$

$$a + c > b + c \quad \text{y} \quad b + c > b + d \qquad \text{Axioma 9}$$

$$a + c > b + d \ \blacksquare \qquad \text{Axioma 8}$$

**Teorema 10-6.** Si $a > b$ y $c > d$, con $a$, $b$, $c$ y $d > 0$, entonces $ac > bd$.

**Teorema 10-7.** Si $a > 0$, $b > 0$ y $a > b$, entonces $1/a < 1/b$.

*Demostración.*

$$a > b \qquad \text{dato}$$

$$a\left(\frac{1}{ab}\right) > b\left(\frac{1}{ab}\right) \qquad \text{Axioma 10}$$

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \ \blacksquare$$

### *EJERCICIO 10-1*

1. Si $a \in R$, diga por qué la desigualdad $a > a$ es imposible.
2. Si $b \in R$, demuestre que $b < 0$ si y sólo si $-b > 0$. Demuestre, además, que $b > 0$ si y sólo si $-b < 0$. [Sugestión: Use el Teorema 10-4.]
3. Si $a$, $b$, $c$ y $d \in R$ con $b > 0$, demuestre que

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad > bc$$

4. Verifique los Teoremas 10-1 a 10-7 usando enteros propiamente escogidos.
5. Demuestre que $a > b$ si y sólo si $a - b > 0$.
6. Si $a \neq 0$, demuestre que $a^2 > 0$.
7. Si $a > b$ y $c > 0$, muestre que $a/c > b/c$.
8. Si $a > b$ y $c < 0$, muestre que $a/c < b/c$.

## 10-2. SOLUCION DE DESIGUALDADES

En lo que resta de este capítulo vamos a considerar desigualdades en las que uno o ambos miembros contienen una variable (o variables). En la Sec. 6-1 definimos dos tipos especiales de ecuaciones —las ecuaciones condicionales y las identidades—. Análogamente, hay en general dos tipos especiales de desigualdades que definimos ahora.

**Definición 10-5.** Una desigualdad que es satisfecha por algunos, pero no todos los valores permisibles de las variables involucradas es llamada una *desigualdad condicional.**

**Definición 10-6.** Una desigualdad que se satisface para todos los valores permisibles de las variables involucradas es llamada una *desigualdad absoluta.*

Así $x + 3 < 4$ es una desigualdad condicional; es válida tan sólo si $x < 1$. Pero $x^2 + 1 > 0$, es válida para todos los valores reales de $x$, y es, por tanto, una desigualdad absoluta.

Resolver una desigualdad significa encontrar todos los valores de las variables o variable que satisfacen a la desigualdad. Los axiomas y teoremas de la sección precedente pueden ser aplicados a la solución de desigualdades. En particular, podemos usar las siguientes propiedades de las desigualdades.

---

* Los valores permisibles incluyen todos los valores para los cuales ambos miembros de la desigualdad están definidos.

1. El sentido de una desigualdad no se altera cuando el mismo número se suma a o se sustrae de ambos miembros.
2. El sentido de una desigualdad no se altera cuando ambos miembros son multiplicados o divididos por el mismo número positivo.
3. El sentido de una desigualdad se invierte cuando ambos miembros son multiplicados o divididos por el mismo número negativo.

Cada una de estas operaciones cambia a una desigualdad en una desigualdad equivalente (esto es, una desigualdad con el mismo conjunto de soluciones). Y el proceso de solución consiste en obtener una serie de desigualdades equivalentes que conducen a una desigualdad final cuya solución es evidente.

EJEMPLO 1. Resolvamos la desigualdad $2 - 3x \leq 2x + 12$.

*Solución.* Sustrayendo $2x + 2$ de ambos lados, obtenemos

$$-5x \leq 10.$$

Dividiendo entonces por $-5$ e invirtiendo el sentido de la desigualdad llegamos a

$$x \geq -2.$$

Esto muestra que una solución de la desigualdad dada es una solución de la última desigualdad. Podemos ahora comenzar con $x \geq -2$, invertir las operaciones y hacer el trabajo a la inversa hacia la desigualdad dada lo cual establecería la equivalencia de la desigualdad que se nos dio con la desigualdad final. Concluimos, entonces, que la solución de la desigualdad dada, en notación de conjuntos, es

$$\{x | x \geq -2\}.$$

EJEMPLO 2. Resolvamos la desigualdad $2x^2 - x - 15 < 0$.

*Solución.* El primer paso es factorizar el miembro izquierdo. Así tenemos

$$(2x + 5)(x - 3) < 0 \text{ o } 2(x + \tfrac{5}{2})(x - 3) < 0.$$

En la forma factorizada, vemos que los ceros de $2x^2 - x - 15$ son $x = -\frac{5}{2}$ y $x = 3$. Para todos los otros valores de $x$ el lado izquierdo es ya sea positivo o negativo. Por tanto, buscamos los valores de $x$ que hacen a algunos de los factores positivo y al otro negativo. El factor $x + \frac{5}{2}$ es negativo cuando $x < -\frac{5}{2}$ y positivo cuando $x > -\frac{5}{2}$. Esto se indica en el eje numérico (Fig. 10-1) por medio de los signos menos a la izquierda de $-\frac{5}{2}$ y los signos de más a la dere-

cha. De manera semejante, el factor $x - 3$ es negativo a la izquierda de 3 y positivo a la derecha. A partir del diagrama, es fácil ver que los factores tienen signos opuestos para todos los valores de $x$ entre $-\frac{5}{2}$ y 3. La solución de la desigualdad dada puede expresarse

$$-\frac{5}{2} < x < 3 \quad \text{o} \quad \{x| -\frac{5}{2} < x < 3\}$$

Refiriéndonos a la Fig. 10-1, vemos que los factores de $2x^2 - x - 15$ son ambos negativos cuando $x < -5/2$ y ambos son positivos cuando $x > 3$. Por tanto, la solución de la desigualdad

$$2x^2 - x - 15 > 0$$

es $\{x|x < -\frac{5}{2} \quad \text{o} \quad x > 3\}$.

### *EJERCICIO 10-2*

Resuelva las siguientes desigualdades.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $4x > 12$ | **2.** $2x - 4 < 6$ | **3.** $5x - 1 > 3x + 7$ |
| **4.** $6x + 3 < x - 9$ | **5.** $x + 6 < 4 - 3x$ | **6.** $5x - 7 < 3x + 2$ |
| **7.** $x^2 - 4 < 0$ | **8.** $x^2 - 4 \geq 0$ | **9.** $x^2 - 25 \leq 0$ |
| **10.** $x(x - 2) < 0$ | **11.** $x^2 - 4x + 3 < 0$ | **12.** $x^2 - 3x - 10 < 0$ |
| **13.** $2x^2 - x - 10 < 0$ | **14.** $3x^2 - 4x - 4 \leq 0$ | **15.** $2x^2 - 9x + 7 < 0$ |
| **16.** $\frac{x - 1}{x} < 0$ | **17.** $\frac{x}{x - 1} > 0$ | **18.** $\frac{x - 4}{x + 4} < 0$ |
| **19.** $\frac{x - 4}{x + 4} > 0$ | **20.** $\frac{x - 1}{x} < 1$ | **21** $\frac{x - 1}{x} > 1$ |

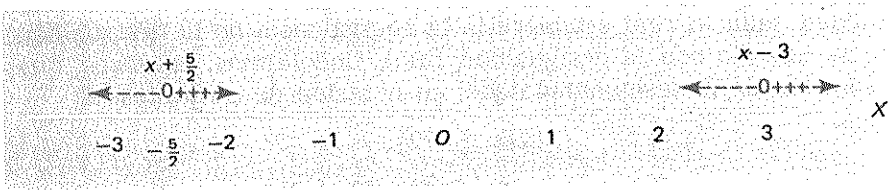



*Figura 10-1*

## 10-3. DESIGUALDADES ABSOLUTAS

En esta sección vamos a tratar con desigualdades absolutas. Para establecer una desigualdad de este tipo, necesitamos mostrar que es válida para todos los valores permisibles de las variables que aparecen en la desigualdad. Los ejemplos ilustran el proceso.

EJEMPLO 1. Mostremos que la desigualdad $2x^2 - 4x + 3 > 0$ es una desigualdad absoluta.

*Solución.* Empezamos con la desigualdad dada y la reducimos a la forma que es claramente válida para todos los valores de $x$. Así,

$$2x^2 - 4x + 3 > 0$$
$$2(x^2 - 2x) + 3 > 0$$
$$2(x^2 - 2x + 1) + 3 - 2 > 0$$
$$2(x - 1)^2 + 1 > 0$$

El término $2(x - 1)^2$ de la última desigualdad no puede ser negativa cuando $x$ toma valores reales. Por tanto, la desigualdad es válida para todos los valores de $x$. Pero el miembro izquierdo de la última desigualdad y el miembro izquierdo de la desigualdad dada son idénticos y, por consiguiente, la desigualdad dada, siendo válida para todos los valores de $x$, es una desigualdad absoluta.

EJEMPLO 2. Demostremos la desigualdad $a + (1/a) \geq 2$, $a > 0$.

*Demostración.* Puesto que $a > 0$, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por $a$ y dejamos el sentido inalterado. Por tanto,

$$a^2 + 1 \geq 2a$$
$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$
$$(a - 1)^2 \geq 0$$

La última desigualdad es válida puesto que $(a - 1)^2$ nunca es negativo. Para completar la demostración no tenemos más que invertir el orden de los razonamientos. Así, mediante operaciones obvias, tenemos

$$(a - 1)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$
$$a^2 + 1 \geq 2a$$
$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

## *EJERCICIO 10-3*

Demuestre que cada una de las siguientes desigualdades es una desigualdad absoluta.

1. $x^2 + 2x + 2 > 0$
2. $x^2 - 10x + 26 > 0$
3. $x^2 + 1 \geq 2x$
4. $4x^2 + 1 \geq 4x$
5. $2x^2 - 4x + 3 > 0$
6. $9x^2 - 6x + 2 > 0$
7. $16x^2 + 1 \geq 8x$
8. $3x^2 - 6x + 4 > 0$

Si $a$, $b$ y $c$ representan números positivos desiguales, demuestre las siguientes desigualdades.

9. $(a+b)^2 > a^2 + b^2$

10. $a^2 + b^2 > 2ab$

11. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} > 2$

12. $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

13. $\dfrac{a+b}{4a} > \dfrac{b}{a+b}$

14. $\dfrac{a^3+b^3}{a+b} > ab$

15. $a^2 + b^2 + c^2 < (a+b+c)^2$

16. $a^2b + ab^2 < a^3 + b^3$

17. $a^3 + 3ab^2 > b^3 + 3a^2b, \quad a > b$

18. $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} > a + b$

19. Si $x$ y $y$ son cualesquier números reales, muestre que

$$\text{(a)}\ |x+y| \leq |x| + |y|, \qquad \text{(b)}\ |x-y| \geq |x| - |y|$$

[Sugestión: Considere los casos en que $x$ y $y$ son del mismo signo y, después, de signos distintos.]

## 10-4. SISTEMAS DE DESIGUALDADES

En esta sección resolveremos algunos sistemas sencillos de desigualdades. El conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades en una variable consiste en todos los números que satisfacen a ambas desigualdades. El conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades en dos variables consiste en la totalidad de parejas ordenadas de números que satisfacen ambas desigualdades.

EJEMPLO 1. Resuelva el sistema de desigualdades

$$2x - 7 < 5 - x$$
$$11 - 5x < 1$$

*Solución.* Buscamos el conjunto de valores para $x$ que hacen a cada desigualdad válida. La primera desigualdad es válida para todos los valores de $x < 4$ y la segunda para todos los valores de $x > 2$. Por tanto, la solución del sistema está dada por la intersección de estos dos conjuntos, que puede expresarse mediante

$$\{x | 2 < x < 4\} \quad \text{o} \quad 2 < x < 4$$

EJEMPLO 2. Resolvamos la desigualdad $|2x - 3| < 7$.

*Solución.* Recordando la definición del valor absoluto de un número (Sec. 3-1), vemos que la desigualdad dada es equivalente al sistema

$$2x - 3 < 7$$
$$2x - 3 > -7$$

Por conveniencia en encontrar la solución, expresamos primero el sistema en la forma extendida equivalente

$$-7 < 2x - 3 < 7$$

Sumamos ahora 3:

$$-4 < 2x < 10$$

Dividimos por 2:

$$-2 < x < 5$$

Por tanto, la solución de la desigualdad dada consiste en el conjunto de números entre $-2$ y 5.

EJEMPLO 3. Resolvamos gráficamente la desigualdad $2x - 3y - 6 < 0$.

*Solución.* Esta es una desigualdad lineal en las variables $x$ y $y$. Resolviendo para $y$, tenemos la desigualdad equivalente

$$y > \frac{2x - 6}{3}$$

La gráfica de $y = (2x - 6)/3$ es la línea trazada en la Fig. 10-2. Las coordenadas $(x_1, y_1)$ de cualquier punto de la línea satisfacen esta ecuación. Pero para las coordenadas de un punto $(x_1, y)$ arriba de la línea tenemos $y > y_1$ y consecuentemente tales coordenadas satisfacen la desigualdad dada. Por tanto, la gráfica del conjunto de soluciones de la desigualdad es el semiplano situado arriba de la línea.

De una manera semejante podríamos mostrar que la gráfica del conjunto de soluciones de $y < (2x - 6)/3$ consiste de todos los puntos que están por debajo de la línea de la Fig. 10-2.

EJEMPLO 4. Resolvamos el sistema de desigualdades

$$x^2 - 6x + 2y - 1 < 0$$

$$3x + 7y - 7 > 0$$

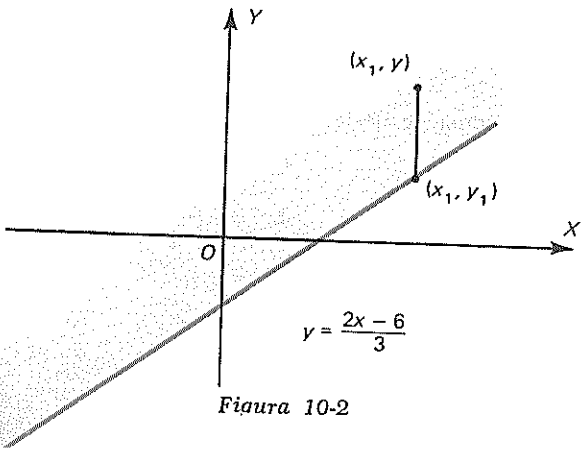



*Figura 10-2*

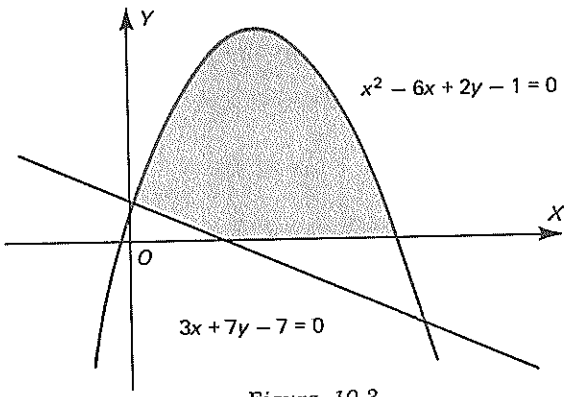



*Figura 10-3*

*Solución.* La gráfica de la ecuación $x^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ es una parábola y la gráfica de la ecuación $3x + 7y - 7 = 0$ es una línea recta (Fig. 10-3). Resolviendo cada desigualdad para $y$, obtenemos el sistema equivalente

$$y < \frac{1 + 6x - x^2}{2}$$

$$y > \frac{7 - 3x}{7}$$

Observamos de estas dos desigualdades que las coordenadas de todos los puntos que están dentro o abajo de la parábola satisfacen a la primera desigualdad y las coordenadas de todos los puntos que están arriba de la línea recta satisfacen a la segunda desigualdad. La gráfica del conjunto de soluciones de las desigualdades dadas es el área sombreada en la figura. Escribimos el conjunto de soluciones como

$$\{(x, y) | x^2 - 6x + 2y - 1 < 0\} \cap \{(x, y) | 3x + 7y - 7 > 0\}$$

### *EJERCICIO 10-4*

Resuelva cada sistema de desigualdades algebraicamente

**1.** $2x + 2 < x + 5$
$3x + 6 > 2 - x$

**2.** $8 - 3x > 5x - 10$
$2x - 15 < 5$

**3.** $10x + 6 > 2x - 2$
$4x - 7 < 3 - x$

**4.** $7x + 50 > 10 - 3x$
$7x + 4 > 2x - 6$

**5.** $5x - 6 < x + 2$
$4x - 7 > 11 - 2x$

**6.** $6x - 2 > 16$
$4x - 7 < 1$

**7.** $|x - 3| < 2$

**8.** $|3x - 4| \leq 5$

**9.** $|2x - 9| < 5$

**10.** $|3 - 2x| \leq 9$

**11.** $|3 - 5x| \leq 12$

**12.** $|7 - x| \leq 6$

Resuelva los siguientes sistemas de desigualdades gráficamente.

**13.** $2x - y - 1 > 0$
$x - 8y + 1 < 0$

**14.** $x - 2y \leq 4$
$x + y \geq 1$

**15.** $2x - y > 2$
$2x + y > 2$

**16.** $y + x < 3$
$y + x > 2$

**17.** $4x + 3y - 6 > 0$
$4x + 3y + 1 > 0$

**18.** $x - 3y \leq 0$
$x + 3y \leq 0$

**19.** $3x + 4y + 14 < 0$
$2x - 5y - 6 > 0$

**20.** $x + y > 4$
$x + y < 2$

**21.** $2x - 4y - 5 > 0$
$x - 2y + 3 < 0$

**22.** $x^2 - 4y < 0$
$y < 4$

**23.** $x^2 + y^2 < 16$
$y - 3x + 9 < 0$

**24.** $y^2 - 4x < 0$
$x - y < 0$

**25.** $x^2 + y^2 < 16$
$x^2 - 4y < 0$

**26.** $x^2 + y^2 < 16$
$x^2 - y > 0$

Muestre que si $a > 0$, todos los puntos interiores a la parábola determinada por la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ satisfacen a la desigualdad $y > ax^2 + bx + c$ y los puntos exteriores a la desigualdad $y < ax^2 + bx + c$. Pero si $a < 0$, todos los puntos interiores a la parábola satisfacen $y < ax^2 + bx + c$ y los interiores $y > ax^2 + bx + c$. [Sugerencia: Considérese cualquier punto $(x_1, y_1)$ sobre la parábola y el punto $(y_2, x_1)$ donde $y_2 > y_1$ y también $y_2 < y_1$.]

Resuelva los siguientes sistemas de desigualdades gráficamente.

**27.** $y > x^2 - 4$
$y < -x^2 + 4$

**28.** $y > x^2 - 4x$
$y < -x^2 + 4x$

**29.** $y > x^2$
$y < -x^2 + 4$

**30.** $y < -x^2$
$y > x^2 - 2$

**31.** $y > x^2$
$y > 2x^2$

**32.** $y < -x^2$
$y < -3x^2$

**33.** $x^2 + y^2 < 9$
$x^2 + y^2 > 4$

**34.** $(3x + 2y - 6)^2 < 0$

**35.** $(2x - 4y + 3)^2 \geq 0$

**36.** $x > 0$
$y > 0$
$y < 4 - 4$

**37.** $y < x$
$y > 0$
$y < -4x + 8$

**38.** $y > \frac{1}{2}x$
$y < 3x$
$y < -2x - 10$

Capítulo 11

# PROGRESIONES

## 11-1. SUCESIONES

Una colección de números en la que un número es designado como el primero, otro como el segundo, otro como el tercero, y así sucesivamente, es llamada una *sucesión*. Cada número de la sucesión es llamado un *término*. El conjunto de números

$$1, 4, 7, 10, 13, 16$$

es un ejemplo de una sucesión de seis términos.

Una sucesión que tiene un número fijo de términos es llamada una sucesión *finita;* de otro modo la sucesión es llamada sucesión *infinita*. El conjunto de todos los enteros positivos pares, que denotamos mediante

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

es una sucesión infinita.

Puesto que los términos de una sucesión están dotados con el orden primero, segundo, tercero, y así sucesivamente, vemos que hay una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de enteros consecutivos, que se inicia con 1, y los términos de una sucesión. Por tanto, la sucesión constituye el rango de una función cuyo dominio es el conjunto de enteros. Por ejemplo, asociando los términos de la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, 11 con los primeros seis enteros positivos, formamos la función

$$\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), (6, 11)\}$$

Si $a_1$ representa al primer término de una sucesión $a_2$ al segundo término, $a_3$ al tercer término, y así sucesivamente, podemos denotar la sucesión con

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

El término $a_n$ es llamado un *término general* o el *n-ésimo término.* Supongamos ahora que se ha dado una expresión en términos de $n$ por medio de la cual mediante sustitución de $n$ por los enteros 1, 2, 3, etc., pueden obtenerse los miembros de una sucesión. En tal caso, podemos escribir tantos miembros de la sucesión como deseemos. Así, por ejemplo, la ecuación $a_n = n^2$ define una función cuyos valores son los términos de la sucesión

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$$

Como otro ejemplo, sea $a_n = n/(n^2 + 1)$. Los términos de la sucesión así determinados son

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{4}{17}, \tfrac{5}{26}, \ldots, \frac{n}{n^2 + 1}, \ldots$$

Los términos de una sucesión pueden ser obtenidos bajo las condiciones siguientes. Supongamos que se da el primer término $a_1$ de la sucesión y que se da también una fórmula mediante la cual cada término de la sucesión, siguiendo al primero, puede ser calculado del término que le precede. Ilustramos esto eligiendo $a_n = 3a_{n-1} + 2$ como fórmula y haciendo $a_1 = 3$. El proceso consiste en sustituir 2 en vez de $n$ para encontrar el segundo término, 3 en vez de $n$ para encontrar el tercer término, y así sucesivamente. Entonces para los primeros cuatro términos, tenemos

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$$
$$a_3 = 3 \cdot 11 + 2 = 35$$
$$a_4 = 3 \cdot 35 + 2 = 107$$

Una fórmula tal como $a_n = 3a_{n-1} + 2$ de este ejemplo es llamada una *fórmula de inducción.*

## *EJERCICIO 11-1*

Escriba los cuatro primeros términos de la sucesión definida por la $a_n$ dada. Encuentre también el vigésimo término.

1. $a_n = 2n + 1$
2. $a_n = \dfrac{1}{n}$
3. $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$
4. $a_n = \dfrac{3n}{n - 2}$
5. $a_n = \dfrac{1}{n(n + 1)}$
6. $a_n = 3n - 2$
7. $a_n = \dfrac{2^n}{n^2 + 1}$
8. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
9. $a_n = (-1)^n 2^n$

Escriba los primeros cuatro términos determinados por la condición dada en cada problema.

10. $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2$

11. $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 2$

12. $a_1 = 5, a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$

13. $a_1 = 4, a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$

14. $a_1 = 2, a_n = \frac{(-1)^n a_{n-1}}{2}$

15. $a_1 = -3, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$

## 11-2. PROGRESIONES ARITMETICAS

En matemáticas suele uno encontrar una gran variedad de sucesiones. Sin embargo, limitaremos nuestro estudio a tres tipos de sucesiones que, aunque comparativamente sencillas, son de especial importancia.

**Definición 11-1.** Una sucesión en la que cada término después del primero se forma sumando un número fijo al número precedente es llamada una *progresión aritmética*. El número fijado es llamado la *diferencia común*.

EJEMPLO 1. La sucesión 2, 5, 8, 11, 14 es una progresión aritmética cuya diferencia común es 3.

EJEMPLO 2. La sucesión 10, 7, 4, 1, $-2$, $-5$, es una progresión aritmética con diferencia común $-3$.

Si $a_1$ representa al primer término y $d$ a la diferencia común de una progresión aritmética, podemos escribir los términos sucesivos por adición repetida de $d$. Así para $n$ términos, tenemos

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots, a_1 + (n-1)d$$

Encontramos el último o $n$-ésimo término observando que el coeficiente de $d$ en cada término es una unidad menor que el número de orden correspondiente al término. Denotando al $n$-ésimo término por $a_n$, tenemos la fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{1}$$

Con $a_1$ y $d$ dados, podemos encontrar cualquier término deseado de una progresión sustituyendo el entero positivo apropiado para $n$.

EJEMPLO 1. Encontremos el trigésimo término de la progresión aritmética 2, 6, 10, . . .

*Solución.* Aquí $a_1 = 2$, $d = 4$ y $n = 30$. Entonces usando la fórmula (1) para $a_n$, encontramos

$$a_{30} = 2 + (30 - 1)4 = 2 + 116 = 118$$

El primero y el último términos de una progresión aritmética son llamados *extremos*, y los términos intermedios son llamados *medias aritméticas*. Si deseamos insertar un cierto número de medias aritméticas entre dos números dados, podemos emplear la fórmula $a_n$ para encontrar $d$. Entonces los términos de la progresión pueden escribirse por adición repetida de $d$.

EJEMPLO 2. Insertemos cinco medias aritméticas entre 7 y 25.

*Solución.* En este caso $a_1 = 7$ y $a_n = 25$. Los términos de la progresión consisten en los dos términos dados además de las cinco medias, lo cual da un total $n = 7$. Sustituyendo en la fórmula (1), encontramos

$$25 = 7 + 6d$$

$$d = 3$$

La progresión es 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.

Ahora tenemos una fórmula para la suma de los términos de una progresión aritmética. Podemos escribir los términos comenzando con el primer término $a_1$ y sumando $d$ repetidamente, o podemos empezar con el último término $a_n$ y sustraer $d$ repetidamente. Suponiendo entonces que $S_n$ representa a la suma de los términos, tenemos las dos ecuaciones

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - d) + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + d) + a_1$$

Sumando los miembros de estas ecuaciones, obtenemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots - (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Puesto que la progresión tiene $n$ términos, la suma $(a_1 + a_n)$ aparece $n$ veces y, por tanto,

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Obtenemos otra fórmula para $S_n$ usando la fórmula (1) para reemplazar $a_n$. Así

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n - 1)d]$$

Tenemos ahora tres fórmulas útiles que son aplicables a las progresiones aritméticas. Reescribimos las fórmulas para facilitar la referencia, son

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \tag{1}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \tag{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] \tag{3}$$

Las cinco cantidades $a_1$, $a_n$, $d$, $n$ y $S_n$ son llamadas los *elementos* de una progresión aritmética. Si cualesquier tres elementos son conocidos, pueden encontrarse los demás usando las fórmulas (1) a (3).

EJEMPLO 3. Dados los elementos $d = 3$, $a_n = 33$ y $S_n = 195$, encontremos $a_1$ y $n$.

*Solución.* Sustituyendo los valores de los elementos conocidos en las fórmulas (1) y (2) obtenemos el sistema

$$33 = a_1 + (n - 1)3$$

$$195 = \frac{n}{2}(a_1 + 33),$$

que se reduce a

$$a_1 + 3n = 36$$

$$n(a_1 + 33) = 390$$

Resolviendo la primera ecuación para $a_1$ y sustituyendo el resultado en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación cuadrática $n^2 - 23n + 130 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $n = 10$, $n = 13$ y los valores correspondientes de $a_1$ son 6 y $-3$. Por lo tanto, las dos soluciones son $n = 10$, $a_1 = 6$ y $n = 13$, $a_1 = -3$.

Cuando $a_1$ y $n$ son las incógnitas, como en este ejemplo, y cuando $a_n$ y $n$ son las incógnitas, las fórmulas (1) y (2) nos dan una ecuación lineal y una ecuación de segundo grado en las incógnitas. Esto significa que puede haber dos soluciones. Sin embargo, un valor de $n$ distinto de un entero positivo, deberá ser rechazado.

## *EJERCICIO 11-2*

Encuentre el último término $a_n$ y la suma $S_n$ de cada progresión aritmética.

1. 2, 5, 8, ... hasta 8 términos
2. 3, 5, 7, ... hasta 21 términos
3. 1.4, 4.5, 7.6, ... hasta 51 términos

4. $-11, -7, -3, \ldots$ hasta 23 términos
5. $10, -2, -14, \ldots$ hasta 17 términos
6. $x - 2, 4x, 7x + 2, \ldots$ hasta 12 términos
7. $2x - y, 3x, 4x + y, \ldots$ hasta 11 términos
8. $y, x, 2x - y, \ldots$ hasta 10 términos.
9. Encuentre la suma de los enteros pares entre 21 y 81.
10. Encuentre la suma de los enteros impares entre 2 y 100.
11. Encuentre la suma de los enteros divisibles por 3 y que son mayores que 2 y menores que 100.
12. Encuentre la suma de los enteros divisibles por 5 que están entre 50 y 200.
13. Encuentre la suma de los primeros $n$ enteros pares positivos y vea que es igual a $n(n + 1)$.
14. Demuestre que la suma de los primeros $n$ enteros positivos impares es $n^2$.
15. Encuentre la suma de los primeros $n$ enteros positivos que son divisibles por 4.
16. Inserte cuatro medias aritméticas entre 3 y 8.
17. Inserte cinco medias aritméticas entre $-9$ y 9.
18. Inserte seis medias aritméticas entre 34 y $-43$.

Encuentre los dos elementos faltantes en cada problema.

19. $a_1 = 6, a_n = 33, n = 10$
20. $a_1 = 36, a_n = 8, d = -2$
21. $a_n = 62, d = 6, n = 18$
22. $d = 5, n = 6, S_n = 51$
23. $a_n = 49, r = 14, S_n = 231$
24. $a_n = 6, d = -2, S_n = 50$
25. $d = 4, a_n = 28, S_n = 108$
26. $d = -2, a_n = 8, S_n = 44$
27. $d = -3, n = 10, S_n = -55$
28. $a_1 = -9, d = -2, S_n = -48$

29. Soltamos un cuerpo desde una altura y comprobamos que el cuerpo cae 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero, y así sucesivamente. Encuentre qué distancia cae el cuerpo durante el séptimo segundo y qué tanto recorre en los 7 primeros segundos.
30. Un objeto cae desde una altura de 1 600 pies. Encuentre el tiempo requerido para que el cuerpo toque tierra. (Vea el Prob. 29.)
31. Un hombre deposita \$ 300 en una cuenta de ahorros al final de cada año durante 15 años consecutivos. Si su dinero le reporta un 3% de interés simple, ¿cuánto tendrá en su cuenta al final de los 15 años?
32. Un hombre compra un coche valuado en \$ 3 300. Acuerda pagar cada mes, comenzando un mes después de la fecha de compra, una cantidad de \$ 100 más un interés del 1% sobre el monto de la deuda durante el mes. Encuentre el monto total del interés que deberá pagar el comprador.
33. Un hombre adquiere un préstamo de \$ 16 800. Llega a un arreglo para pagar la deuda, que consiste en un pago de \$ 280 al final de cada trimestre más un interés sobre la deuda durante el trimestre. Los pagos del interés son de \$ 210, \$ 206.50, \$ 203, y así sucesivamente. Encuentre el monto total del interés que habrá pagado al término de sus pagos.

## 11-3. PROGRESIONES GEOMETRICAS

Como señalamos en la Sec. 11-1, una sucesión es el conjunto de valores que toma una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos, o un subconjunto finito (acotado) de los enteros positivos, según sea la sucesión infinita o finita. Hemos introducido las progresiones aritméticas como un tipo especial de sucesiones, y ahora consideramos otro importante tipo especial de sucesiones.

**Definición 11-2.** Una sucesión en la que cada término después del primero es el producto del término precedente por un término fijado de antemano, es llamado una *progresión geométrica.* El número fijo denotado por $r$, es llamado la *razón común.*

EJEMPLOS.

| | |
|---|---|
| $2, 4, 8, 16$ | razón común 2 |
| $1, -3, 9, -27$ | razón común $-3$ |

El primer término, la razón común, el número de términos, el $n$-ésimo término y la suma de $n$ términos constituyen los cinco elementos de una progresión geométrica. Denotamos a los elementos, en el orden mencionado, por $a_1$, $r$, $n$, $a_n$ y $S_n$. El primero y último términos de una progresión geométrica son llamados los *extremos* y los términos intermedios son llamados las *medias.*

Podemos escribir los términos de una progresión geométrica a partir de los elementos $a_1$, $r$ y $n$ como

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \ldots, a_1r^{n-1}$$

Obtenemos el último, o $n$-ésimo término, observando que el exponente de $r$ en cada término es 1 unidad menor que el número de orden del término. Denotando el $n$-ésimo término por $a_n$, tenemos la fórmula

$$a_n = a_1r^{n-1} \tag{1}$$

EJEMPLO 1. Encontremos el sexto término de la progresión geométrica $9, -6, 4, \ldots$

*Solución.* En este caso vemos que el primer término multiplicado por $-2/3$ da el segundo término, y así también el producto del segundo término y $-2/3$ da el tercer término. Usando entonces $a_1 = 9$, $r = -2/3$ y $n = 6$ en la fórmula (1), encontramos

$$a_n = 9(-\tfrac{2}{3})^{6-1} = 9(-\tfrac{32}{243}) = -\tfrac{32}{27}$$

EJEMPLO 2. Insertemos tres medias geométricas entre 81 y 16.

*Solución.* Tenemos $a_1 = 81$, $a_n = 16$, y, contando los dos extremos y las tres medias, $n = 5$. Así pues, de la fórmula (1),

$$16 = 81r^4$$

$$r^4 = \frac{16}{81}$$

$$r = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad -\frac{2}{3}$$

Usando estos valores posibles de $r$, escribimos las dos progresiones

$$81, 54, 36, 24, 16 \quad \text{y} \quad 81, -54, 36, -24, 16$$

Para encontrar una fórmula para la suma $S_n$ de $n$ términos de una progresión geométrica, escribimos las dos ecuaciones

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$$

$$rS_n = \quad a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} + a_1r^n$$

La segunda ecuación se obtiene multiplicando cada miembro de la primera ecuación por $r$ y colocando los términos semejantes de los miembros derechos uno bajo el otro. Sustrayendo los miembros de la segunda ecuación de los miembros correspondientes de la primera ecuación, obtenemos

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$(1 - r)S_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Esta fórmula da la suma en términos de $a_1$, $r$ y $n$. La suma en términos de $a_1$, $r$ y $a_n$ puede obtenerse usando la fórmula (2). Así pues, $a_n = a_1r^{n-1}$ o $ra_n = a_1r^n$ y, por tanto,

$$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r} = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}$$

Tenemos ahora las siguientes fórmulas que involucran a los elementos de una progresión geométrica.

$$a_n = a_1r^{n-1} \tag{1}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \tag{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r} \tag{3}$$

Con cualesquier tres elementos conocidos, estas fórmulas son suficientes para la obtención de los términos restantes. En algunos casos habrá más de una solución.

Observamos que las fórmulas (2) y (3) no son aplicables cuando $r = 1$. Sin embargo, la suma para este caso trivial se determina fácilmente de otra manera.

EJEMPLO 3. Calculemos la suma de los primeros seis términos de la progresión geométrica 2, $-6$, 18, ..., usando las fórmulas (2) y (3).

*Solución.* Aquí $a_1 = 2$, $r = 3$, $n = 6$ y, por tanto,

$$a_6 = 2(-3)^5 = -486$$

Por la fórmula (2),

$$S_6 = \frac{2[1 - (-3)^6]}{1 - (-3)} = \frac{2(1 - 729)}{4} = -364$$

y por la fórmula (3),

$$S_6 = \frac{2 + 3(-486)}{1 - (-3)} = \frac{2 - 1458}{4} = -364$$

## *EJERCICIO 11-3*

Encuentre el último término $a_n$ y la suma $S_n$ de cada progresión geométrica.

1. 2, 6, 18, ... a 6 términos.
2. 3, 6, 12, ... a 7 términos
3. 81, 54, 36, ... a 5 términos.
4. 64, $-32$, 16, ... a 6 términos
5. 64, $-96$, 144, ... a 5 términos
6. 36, 12, 4, ... a 6 términos.
7. Inserte tres medias geométricas entre 2 y 162.
8. Inserte seis medias geométricas entre 128 y 1.
9. Inserte cuatro medias geométricas entre $-1/4$ y 8.
10. Inserte cuatro medias geométricas entre 8/9 y 27/4.

Encuentre los dos términos que faltan en cada progresión geométrica.

11. $a_1 = 6, r = 3, a_n = 486$
12. $a_1 = 3, r = -2, a_n = 768$
13. $a_1 = -3, r = -4, a_n = 3072$
14. $a_n = 81, r = 3, n = 6$
15. $a_1 = \frac{3}{2}, a_n = 48, r = 2$
16. $a_1 = \frac{27}{64}, a_n = \frac{1}{8}, n = 4$
17. $r = -\frac{3}{2}, n = 4, S_n = -\frac{52}{5}$
18. $a_1 = 15, r = \frac{2}{5}, S_n = \frac{1117}{5}$
19. Si al final de cada año el valor de un carro es 2/3 de su valor al principio del año, encuentre el valor de un automóvil de \$ 3 300 al final de cuatro años.
20. La población de una ciudad es 30 000. Considerando que cada 5 años la población crecerá en 50% de lo que era al principio de los 5 años, encuentre la población al final de 20 años.

21. El número de bacterias en un cierto cultivo se duplica cada 3 h. Si hay $N$ bacterias al comenzar, encuentre el número al final de 24 h.
22. Si la población de un estado es 2 000 000 y si la razón de incremento es 10% cada año, ¿cuál será la población al final de 6 años?
23. Si cada revolución de una bomba de vacío remueve el 10% del aire que hay en un recipiente, ¿cuánto del aire original quedará después de 10 revoluciones? ¿Cuántas revoluciones se requieren para remover 95% del aire?
24. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba a una altura de 100 pies. Cada vez que la pelota toca el suelo rebota hasta un medio de la altura alcanzada en el rebote anterior. ¿Qué distancia ha recorrido la pelota en su movimiento hacia arriba y hacia abajo cuando toca el suelo por quinta vez?
25. Se suelta una pelota desde una altura y la pelota rebota hasta 2/3 de la altura desde la que fue soltada. Encuentre la distancia total viajada por la pelota desde el momento en que fue soltada desde una altura de 60 pies hasta que ésta toca el suelo por quinta vez.
26. Un recipiente de 10 lt es llenado con agua. Se retira un litro de agua que es reemplazado con alcohol. Se retira un litro de la mezcla y se vuelve a reemplazar con alcohol. Este proceso se continúa hasta que se han introducido 5 lt de alcohol en el recipiente. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en la solución del recipiente?
27. Un hombre puede ocupar un puesto con un sueldo inicial de $ 4 000 al año con un incremento de $ 450 anual, o puede comenzar con el mismo pago anual y recibir en cada año que sigue un 10% más de lo que recibió en el año inmediatamente anterior. ¿Cuál de las dos proposiciones le producirán un mejor ingreso durante el quinto año? ¿Cuál de las proposiciones le producirá un mejor ingreso total en el periodo de cinco años?
28. Según se dice en un cuento, el dueño de un caballo hizo el siguiente arreglo. Para herrar el caballo, lo cual requiere 32 clavos, acordó pagar un centavo por el primer clavo, 2 cts. por el segundo, 4 cts. por el tercer clavo, 8 cts. por el cuarto clavo, y así sucesivamente. Según este plan, ¿cuál habría sido el costo por el herraje del caballo?

## 11-4. PROGRESIONES GEOMETRICAS INFINITAS

Al dividir 1 por 3, obtenemos la fracción decimal infinita .3333... . Cada dígito de esta fracción es un término de una progresión geométrica. Esto es evidente cuando expresamos los valores de los dígitos como

$$.3, .03, .003, .0003, \ldots$$

Denotando la suma de esta progresión geométrica infinita mediante $S$, escribimos

$$S = .3 + .03 + .003 + .0003 + \cdots$$

El miembro derecho es aquí llamado una *progresión geométrica infinita* o una *serie geométrica infinita*. La suma de los primeros

$n$ términos de esta serie, por la fórmula (2) de la sección precedente, es

$$S_n = \frac{.3[1 - (.1)^n]}{1 - .1} = \frac{.3[1 - (.1)^n]}{.9}$$

$$= \tfrac{1}{3}[1 - (.1)^n] = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}(.1)^n$$

Claramente, podemos hacer el último término a la derecha tan pequeño como deseemos tomando $n$ suficientemente grande. Cuando $n = 10$, por ejemplo, el último término es igual a $\dfrac{1}{30\,000\,000\,000}$ y $S_{10}$ difiere, por tanto, de 1/3 por esta cantidad muy pequeña. Valores mayores de $n$ harían por supuesto a $S_n$ más cercano a 1/3. Diremos, en consecuencia, que la suma de la serie geométrica infinita es 1/3.

Supongamos ahora que consideramos la serie geométrica infinita

$$S = a_1 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_1 r^n + \cdots$$

La fórmula para la suma de $n$ términos está dada por

$$S_n = \frac{a_1[1 - r^n]}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a \cdot r^n}{1 - r}$$

Si $|r| < 1$, o $-1 < r < 1$, el último término de esta suma puede hacerse, en forma arbitraria, cercano a cero tomando a $n$ suficientemente grande. Por consiguiente, $S_n$ puede hacerse arbitrariamente cercano a $a_1/(1 - r)$. Describimos esta situación, usando el símbolo $\infty$ (infinito), escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

El lado izquierdo de esta ecuación se lee "el límite de $S_n$ cuando $n$ se acerca a infinito". Y definimos el miembro derecho como la suma de la serie geométrica infinita. Entonces, si $S$ representa a la suma de la serie, tenemos la fórmula sencilla

$$S = \frac{a_1}{1 - r}, \quad |r| < 1$$

Cuando $r \leq -1$ y cuando $r \geq 1$, el valor absoluto de los términos crecen de un término al siguiente o permanecen inalterados. Para estos valores de $r$, $S_n$ no tiene límite al acercarse $n$ a infinito.

Si $a_1$ y $r$ son números racionales y $|r| < 1$, la suma de la serie geométrica infinita correspondiente es un número racional.

EJEMPLO 1. Encontremos la suma de la progresión geométrica infinita $3/2, -1, 2/3, -4/9, \ldots$ .

*Solución.* En esta progresión $a_1 = 3/2$ y $r = -2/3$. Por tanto,

$$S = \frac{\frac{3}{2}}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$$

EJEMPLO 2. Expresemos el decimal periódico $4.767676\ldots$ como un número racional.

*Solución.* La fracción $0.767676\ldots$ puede escribirse en la forma

$$0.76 + 0.0076 + 0.000076 + 0.00000076 + \cdots$$

Para encontrar la suma de esta serie, observamos que $a_1 = 0.76$ y $r = 0.01$ y, por tanto,

$$S = \frac{0.76}{1 - 0.01} = \frac{0.76}{0.99} = \frac{76}{99}$$

Por tanto,

$$4.767676\cdots = 4 + \frac{76}{99} = \frac{472}{99}$$

## 11-5. PROGRESIONES ARMONICAS

Una sucesión de números cuyos recíprocos forman una progresión aritmética es llamada una *progresión armónica*. De acuerdo a esta definición, las sucesiones

$$\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{15}, \tfrac{1}{19}, \tfrac{1}{23}$$

y

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1 + d}, \frac{1}{a_1 + 2d}, \ldots, \frac{1}{a_1 + (n-1)d}$$

son progresiones armónicas. Suponemos que ningún denominador en la segunda sucesión es igual a cero.

Para insertar $k$ medias armónicas entre dos números dados $p$ y $q$, no nulos, tomamos los recíprocos de las $k$ medias aritméticas entre $1/p$ y $1/q$.

EJEMPLO. Insertemos cuatro medias armónicas entre $1/9$ y $1/5$.

*Solución.* Insertamos cuatro medias aritméticas entre 9 y 5, y se obtiene la progresión aritmética

$$9, \tfrac{41}{5}, \tfrac{37}{5}, \tfrac{33}{5}, \tfrac{29}{5}, 5$$

Por tanto, lo progresión armónica requerida es

$$\tfrac{1}{9}, \tfrac{5}{41}, \tfrac{5}{37}, \tfrac{5}{33}, \tfrac{5}{29}, \tfrac{1}{5}$$

## *EJERCICIO 11-4*

Encuentre la suma de cada serie geométrica infinita

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$
2. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$
3. $25 + 5 + 1 + \cdots$
4. $7 + 2.1 + 0.63 + \cdots$
5. $8 - 1.6 + 0.32 + \cdots$
6. $5 - 3 + \frac{9}{5} - \cdots$
7. $-7 + 3 - \frac{9}{7} + \cdots$

Exprese cada uno de los siguientes números en forma racional. Reduzca fracciones a términos mínimos.

8. $0.777\cdots$
9. $0.888\cdots$
10. $0.3434\cdots$
11. $0.2121\cdots$
12. $0.4747\cdots$
13. $3.1212\cdots$
14. $0.123123\cdots$
15. $0.819819\cdots$
16. $2.987987\cdots$
17. $0.142857142857\cdots$
18. $0.076923076923\cdots$

19. Compare la suma de la serie geométrica infinita $1 + 1/2 + 1/4 + \ldots$ con la suma de sus diez primeros términos.
20. Compare la suma de la serie geométrica infinita $1 - 1/9 + 1/81 - 1/729 + \ldots$ con la suma de los primeros cuatro términos.
21. Cierta pelota rebota 4/5 de la distancia desde la que ha caído. Encuentre qué tanto ha recorrido la pelota antes de llegar al reposo si se le suelta desde una altura de 120 pies.
22. Encuentre la distancia total que recorre el peso de un péndulo si la distancia de la primera oscilación es 5 plg y la distancia de cada oscilación subsecuente es 0.97 de la distancia de la oscilación previa.
23. Encuentre el noveno término de la progresión armónica 1/2, 1/6, 1/10, ...
24. Encuentre el décimo término de la progresión armónica 1/4, 1/7, 1/10.....
25. Inserte cuatro medias armónicas entre 1/3 y 1/14.
26. Inserte cinco medias armónicas entre 2 y 8.
27. Inserte tres medias armónicas entre 1/17 y 1.
28. Inserte una media armónica entre $a$ y $b$.
29. Inserte dos medias armónicas entre $1/a$ y $1/b$.
30. Se ha empleado a un hombre con un salario inicial de \$12 000 al año. Se le ha ofrecido incrementar su salario en \$400 cada año, al terminar el año, o alternativamente aumentarle la paga en \$100 cada semestre y al final de cada semestre, Encuentre las ganancias totales según cada uno de los dos planes al finalizar los 4 años.
31. El costo de un tractor nuevo es de \$22 000. Supongamos que el tractor se deprecia en 20% de su valor original el primer año, 17% de su valor original el segundo año, y 14% de su valor original el tercer año, y así sucesivamente. ¿Cuál es el valor del tractor al cabo de 7 años?
32. Una persona ha aceptado un puesto por un periodo de 5 años. Puede elegir entre un aumento de \$30 al mes al final de cada semestre o un aumento de \$67 al mes al final de cada año. ¿En cuánto contribuyen los aumentos solos al ingreso en cada uno de los dos planes?

33. El término medio de una progresión aritmética de tres términos se llama la *media aritmética* del primero y tercer términos. Muestre que si $a$, $x$, $b$ forman una progresión aritmética, entonces $x = (a + b)/2$.
34. El término medio de una progresión geométrica de tres términos es llamado la *media geométrica* de los términos primero y tercero. Muestre que si $a$, $x$, $b$ forman una progresión geométrica, entonces $x = \pm \sqrt{ab}$.
35. Si $a$ y $b$ son números desiguales positivos, muestre que su media geométrica es menor que su medio aritmético.

Encuentre la media geométrica de cada par de números.

36. $81, \frac{1}{9}$ 37. $\frac{1}{4}, 36$ 38. $-4, -25$ 39. $x, 2x$

40. Demuestre que los recíprocos de los términos de una progresión geométrica también forman una progresión geométrica.
41. Inserte cinco medias armónicas entre 4 y 2.

Capítulo 12

# PERMUTACIONES, COMBINACIONES Y PROBABILIDAD

## 12-1. PRINCIPIO FUNDAMENTAL

Las permutaciones, combinaciones y probabilidad, que vamos a definir y a estudiar en este capítulo, son conceptos que poseen un aspecto recreativo que atrae a muchas personas. Pero además de esta feliz coincidencia, poseen también aplicaciones prácticas y teóricas importantes. Como un primer paso, examinaremos un principio que es fundamental en el estudio de estos temas.

Una ilustración será de utilidad en el entendimiento de este principio. Supóngase que se ha de elegir un gobernador de entre tres candidatos y un gobernador lugarteniente de entre otros 4. Determinemos el número de formas distintas en que pueden ocuparse las dos posiciones. Hay tres maneras de ocupar el puesto de gobernador y con cada una de estas posibles hay cuatro elecciones también para el vicegobernador. Por tanto, tenemos $3 \cdot 4 = 12$ diferentes maneras posibles de hacer las dos elecciones deseadas. Para verificar estos resultados designamos los candidatos para gobernador con las letras $A$, $B$ y $C$ y los candidatos para vicegobernador como $x$, $y$, $z$ y $w$. Los puestos pueden entonces ser ocupados de las 12 maneras siguientes:

$$\begin{array}{cccc} Aw & Ax & Ay & Az \\ Bw & Bx & By & Bz \\ Cw & Cx & Cy & Cz \end{array}$$

Generalizando el razonamiento de este ejemplo podemos hacer el siguiente enunciado

**Principio fundamental.** Si una acción puede ser efectuada de $m$ maneras diferentes y una segunda acción puede ser realizada en $n$ formas distintas, se concluye que el número total de maneras diferentes en que puede realizarse la primera acción seguida por la segunda es igual a $m$ veces $n$.

La verdad de este principio es clara si se observa que por cada una de las $m$ posibilidades de realización de la primera acción hay $n$ posibilidades para la segunda. Es igualmente evidente que el principio puede extenderse a tres o más acciones.

EJEMPLO 1. ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse a partir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 si (a) no se ha de repetir dígito alguno en un número; (b) se permiten las repeticiones?

*Solución.* (a) Hay cinco elecciones para el dígito de las decenas, y habiendo hecho una elección quedan cuatro elecciones para el dígito de las unidades. Así pues, el total de las posibilidades es $5 \cdot 4 = 20$. El mismo resultado, por supuesto, podría obtenerse eligiendo primero el dígito de las unidades y entonces el dígito de las decenas.

(b) Si se permiten las repeticiones hay cinco elecciones para el dígito de las decenas y cinco elecciones para el dígito de las unidades dando así $5 \cdot 5$, o 25 números posibles de dos dígitos.

EJEMPLO 2. ¿De cuántas maneras pueden cinco personas tomar asiento en un automóvil, si dos han de viajar en el asiento delantero y tres en el asiento trasero, dado que dos personas determinadas no han de viajar en la posición del conductor?

*Solución.* Designemos las cinco posiciones por las letras $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, siendo $A$ el símbolo de la posición del conductor. Tomando estas posiciones en el orden nombrado, escribamos arriba de cada letra el número que nos dice de cuántas maneras puede ser ocupada la posición.

| 3 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |

Tenemos tres elecciones para el conductor, cuatro para el lugar $B$, tres elecciones para el lugar $C$, dos elecciones para el lugar $D$, y una elección para el lugar $E$. Así pues, el número total de arreglos es $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$.

## *EJERCICIO 12-1*

1. ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse con los dígitos 2, 4, 6, 8 si (a) se permiten repeticiones; (b) no se ha de repetir dígito alguno en un número?
2. ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 si (a) se permiten repeticiones; (b) no se permiten repeticiones?
3. ¿Cuántos números de tres dígitos (siendo el primer dígito distinto de cero) pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 si (a) se permiten repeticiones; (b) no se permiten repeticiones?
4. ¿Cuántos números de cuatro dígitos, cada uno menor que 5 000, pueden formarse con los dígitos 1, 2, 4, 6, 8 si (a) se permiten repeticiones; (b) no se permiten repeticiones?
5. ¿Cuántos comités consistentes en un estudiante de primer año, un estudiante de segundo año, y un estudiante de tercer año pueden formarse contando con 40 estudiantes de primero, 30 estudiantes de segundo y 25 estudiantes de tercero?
6. Hay cinco caminos a la cumbre de una colina. ¿De cuántas maneras se puede subir y bajar usando (a) veredas distintas; (b) cualquier vereda?
7. Hay cinco muchachos en un cuarto con 4 puertas. ¿De cuántas maneras pueden salir del cuarto?
8. Un edificio tiene 6 puertas exteriores. ¿De cuántas maneras puede uno entrar y salir (a) por puertas diferentes; (b) por cualquier puerta?
9. ¿Cuántas señales pueden formarse con cinco diferentes tipos de banderas colocadas en una asta de arriba hacia abajo? ¿Cuántas señales pueden formarse si se usan tan sólo 4 banderas a un tiempo?
10. Una placa consiste en dos letras seguidas por cuatro dígitos. ¿Cuántas placas pueden elaborarse (a) si se pueden repetir letras y dígitos; (b) si no se pueden repetir?
11. ¿En cuántas maneras pueden tres personas tomar asiento en un cuarto donde hay 7 asientos?
12. ¿De cuántas maneras pueden arreglarse 5 libros en un estante? ¿De cuántas maneras pueden colocarse si dos libros determinados deben quedar contiguos?
13. Cuatro parejas toman asiento alrededor de una mesa redonda con hombres y mujeres alternados. Si la anfitriona se reserva un lugar, ¿de cuántas formas puede ella asignar los asientos a los convidados?
14. ¿Cuántos arreglos pueden obtenerse en el Prob. 13 si la anfitriona no ha de sentarse contigua al anfitrión?
15. Un club tiene 21 miembros. ¿De cuántas maneras pueden elegirse un presidente y un vicepresidente en el grupo si ningún miembro es elegible para ambas posiciones?
16. ¿De cuántas maneras pueden 5 hombres y 4 mujeres sentarse en una hilera de 9 sillas (a) con hombres y mujeres alternados; (b) si las mujeres no deben quedar separadas; (c) si las mujeres han de quedar juntas lo mismo que los hombres?
17. Las localidades A y B están conectadas por 3 caminos y las localidades B y C por 4 caminos. ¿De cuántas maneras puede uno conducir desde

A hasta B y C y retornar a A vía B si (a) no se ha de recorrer el mismo camino dos veces, (b) puede recorrerse el mismo camino dos veces?

18. ¿De cuántas maneras puede un club de 21 miembros escoger un presidente, un secretario y un tesorero si ningún miembro puede ocupar más de uno de los puestos?
19. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un estante 9 libros, seis con cubiertas verdes y 3 con cubiertas rojas, si (a) los libros rojos no deben separarse; (b) los libros verdes no deben separarse; (c) libros del mismo color se mantienen juntos?
20. ¿Cuántos números impares de tres dígitos (siendo el primer dígito distinto de cero) pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 si (a) ningún dígito se repite en un número; (b) se permiten repeticiones?

## 12-2. PERMUTACIONES

El Principio Fundamental de la sección anterior puede aplicarse efectivamente al estudio de las permutaciones que definimos de la manera siguiente.

**Definición 12-1.** Un arreglo de objetos que tiene un orden definido es llamado una *permutación* de los objetos.

Las letras $a$, $b$, $c$, por ejemplo, tienen las siguientes permutaciones o arreglos:

$$a\,b\,c \qquad a\,c\,b \qquad b\,a\,c \qquad b\,c\,a \qquad c\,a\,b \qquad c\,b\,a$$

Hay seis permutaciones. Es fácil determinar el número de permutaciones, sin embargo, sin escribir una lista. Para hacerlo, notamos que hay tres posiciones para llenar. Por tanto, hay 3 posibilidades para la primera posición, después 2 para la segunda y 1 para la tercera. De acuerdo al principio fundamental hay $3 \cdot 2 \cdot 1$ órdenes diferentes en los que pueden describirse las letras.

Apliquemos ahora este razonamiento al caso de $n$ objetos donde $r$ de los objetos ($r$ una parte o todo) se utilizan a un tiempo. Podemos interpretar este problema como el problema de elegir $r$ objetos para ocupar $r$ posiciones de entre $n$ candidatos. De este modo hay $n$ elecciones posibles para la primera posición, $n$-1 elecciones para la segunda posición, $n$-2 elecciones para la tercera posición, y así sucesivamente. Observamos que la continuación de este proceso nos deja $n - (r - 1) = n - r + 1$ elecciones para la $r$-ésima posición. Descubrimos, entonces, que el número de permutaciones de $n$ objetos tomados $r$ a la vez está dado por el producto de $r$ enteros desde $n$ hasta $n - r + 1$, inclusive. Denotando este producto por $P(n, r)$, escribimos la fórmula

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (1)$$

Para encontrar el número de permutaciones de $n$ objetos tomados todos a un tiempo, simplemente escribimos $r = n$ en la fórmula. Tenemos entonces el producto de todos los enteros desde 1 hasta $n$ inclusive. El símbolo $n!$ (léase "factorial $n$") se usa como notación abreviada para ese producto. De acuerdo a esta definición de $n!$, donde $n$ es un entero positivo, tenemos los ejemplos

$$1! = 1 \quad 2! = 1 \cdot 2 \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Usando la notación factorial, expresamos la fórmula para el número de permutaciones de $n$ objetos tomados todos a un tiempo mediante

$$P(n, n) = n! \tag{1'}$$

La notación factorial nos permite expresar la fórmula (1) en una forma más compacta. El producto en la fórmula (1) tiene como factores todos los enteros desde $n$ hasta $n - r + 1$, inclusive. Si multiplicamos este producto por $(n - r)!$, el resultado es $n!$ Multiplicando entonces y dividiendo el miembro derecho de la fórmula (1) entre $(n - r)!$, obtenemos la fórmula.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} \tag{2}$$

Si escribimos $r = n$ en esta fórmula, tenemos $n!/0!$ Usando entonces la definición acostumbrada del factorial cero, a saber, $0! = 1$, tenemos $P(n, n) = n!$ Por tanto, ambas fórmulas (1) y (2) son aplicables cuando $r$ es cualquier entero positivo desde 1 hasta $n$, inclusive, y tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 12-1.** El número de permutaciones de $n$ objetos tomados $r$ a un tiempo es

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1) \tag{1}$$

o bien

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} \tag{2}$$

EJEMPLO. ¿Cuántas permutaciones se pueden hacer con las letras de la palabra MONDAY si (a) 4 letras son usadas a un tiempo; (b) se usan todas las letras; (c) se usan todas las letras eligiendo una vocal para la primera posición?

*Solución.* (a) Deseamos encontrar el número de permutaciones de 6 objetos tomando 4 a un tiempo. Usando la fórmula (1) o el principio fundamental, tenemos

$$P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

(b) De la fórmula (1′), o volviendo al principio fundamental, tenemos

$$P(6, 6) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

(c) La primera letra en cada permutación ha de ser alguna de "*o*" o "*a*". Por tanto, tenemos dos elecciones para la primera letra. Pero después de elegir la primera letra, podemos elegir las 5 restantes sin restricción, y consecuentemente de 5! maneras. El número total de maneras de elegir la primera letra y las subsecuentes es $2 \cdot 5! = 240$.

## 12-3. PERMUTACIONES DE OBJETOS NO TODOS DISTINTOS

Las fórmulas del Teorema 12-1 se obtuvieron bajo la suposición de que el conjunto de $n$ objetos, incluye objetos que son todos distintos entre sí. Las fórmulas no se aplican si algunos de los objetos son iguales. La palabra ALASKA, por ejemplo, tiene seis letras. Pero no podemos hacer 6! permutaciones usando las seis letras a un tiempo porque tres letras son iguales. Como ayuda para encontrar el número de permutaciones distintas, asignemos subíndices a las tres Aes. Escribiendo así

$$A_1 \; L \; A_2 \; S \; K \; A_3$$

tenemos seis objetos distintos. Habiendo distinguido las Aes tenemos ahora 6! permutaciones posibles. Permitiendo que L, S y K permanezcan en posiciones fijas, permutamos las Aes entre sí. Esto puede hacerse de 3! maneras como se muestra.

$$A_1 \; L \; A_2 \; S \; K \; A_3 \qquad A_1 \; L \; A_3 \; S \; K \; A_2 \qquad A_2 \; L \; A_1 \; S \; K \; A_3$$

$$A_2 \; L \; A_3 \; S \; K \; A_1 \qquad A_3 \; L \; A_1 \; S \; K \; A_2 \qquad A_3 \; L \; A_2 \; S \; K \; A_1$$

No podríamos distinguir entre sí estos seis arreglos si se removiesen los subíndices. Así vemos que a cada permutación de las seis letras corresponden 3! permutaciones si se considera a las Aes distintas. De este modo el número de permutaciones $P$ de 6 objetos de los cuales 3 son iguales multiplicado por 3! nos da el número de permutaciones de 6 objetos diferentes. Esto es,

$$3!P = 6! \quad \text{y} \quad P = \frac{6!}{3!} = 120$$

Este razonamiento puede ser aplicado al caso general de $n$ objetos de los cuales $n_1$ son idénticos. En este caso cualquier arreglo de $n$ objetos podría ser reemplazado por $n_1!$ permutaciones al distin-

guir entre sí a los $n_1$ objetos. Por tanto, escribimos el siguiente teorema.

Teorema 12-2. El número de permutaciones $P$ de $n$ objetos tomados todos a un tiempo, donde $n_1$ de los objetos son iguales y los demás distintos, es

$$P = \frac{n!}{n_1!}$$

Esta fórmula puede extenderse a los casos en que haya dos, tres, o más grupos de *objetos* idénticos entre los $n$ objetos. Así escribimos

$$P = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots}$$

EJEMPLO 1. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las 9 letras de la palabra TENNESSEE?

*Solución.* Tenemos 2 eSes, 2 eNes y 4 Ees y, por tanto,

$$P = \frac{9!}{2!2!4!} = 3780$$

EJEMPLO 2. Un hombre distribuye una moneda de 50 cts, 2 de veinticinco centavos, 3 de diez centavos y 4 de cinco centavos entre 10 niños. ¿De cuántas maneras puede repartirse este dinero entre los muchachos si cada uno ha de quedarse con una moneda?

*Solución.* Si las monedas fueran todas distintas habría 10! maneras posibles de repartir el dinero entre los muchachos. Pero puesto que hay grupos de 1, 2, 3 y 4 monedas iguales, tenemos

$$P = \frac{10!}{2!3!4!} = 12\,600$$

En nuestra discusión hemos supuesto hasta el momento que una permutación se forma colocando un objeto tras de otro en una línea. Hay, por tanto, un primero y un último objetos. Si los objetos se arreglan en un círculo, sin embargo, no hay primero o último objeto, y las fórmulas del Teorema 12-1 no se aplican directamente. Un arreglo circular nos presenta un nuevo aspecto, ya que una simple rotación no cambiaría la posición relativa de los objetos entre sí. Decimos, por tanto, que una rotación no constituye una permutación diferente.

Para encontrar el número de maneras en que se pueden arreglar $n$ objetos diferentes en un círculo, elegimos primeramente una posición para uno de los objetos. Después pueden colocarse los demás

en sus posiciones de $(n - 1)!$ diferentes maneras. Seis personas, por ejemplo, pueden formar un círculo en 5! maneras. Podrían, desde luego, formar una línea de 6! maneras.

EJEMPLO 3. ¿De cuántas maneras pueden cuatro parejas sentarse alrededor de una mesa si hombres y mujeres han de alternarse?

*Solución.* Pensamos primeramente en asignar una persona, digamos una mujer, a una silla. Esto determina 3 lugares particulares para las otras mujeres y 4 lugares particulares para los hombres. Las mujeres, por tanto, pueden obtener sus lugares de 3! maneras y los hombres de 4! maneras. Aplicando el principio fundamental, obtenemos el resultado $3!4! = 144$.

## *EJERCICIO 12-2*

1. Evalúe (a) $P(7, 1)$; (b) $P(7, 3)$; (c) $P(7, 4)$; (d) $P(7, 7)$.
2. Evalúe $P(4, 1) + P(4, 2) + P(4, 3) + P(4, 4)$.
3. Muestre que (a) $P(5, 4) = P(5, 5)$; (b) $P(6, 5) = P(6, 6)$; (c) $P(n, n - 1) = P(n, n)$.
4. ¿De cuántas maneras pueden arreglarse las letras de la palabra TEXAS si (a) han de usarse todas las letras; (b) han de usarse 2 a la vez; (c) han de usarse 3 a la vez?
5. Encuentre el número de permutaciones, cada una con 7 letras, que pueden formarse con las letras en (a) WYOMING; (b) KENTUCKY; (c) WASHINGTON.
6. ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 si no ha de repetirse dígito alguno en un número? ¿Cuántos números de cuatro dígitos?
7. Encuentre cuántos números pares de tres dígitos cada uno pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 6, 7 si no se ha de repetir dígito alguno.
8. ¿Cuántos números de cinco dígitos, cada uno menor que 70 000, pueden formarse con los dígitos 1, 2, 5, 7, 9 si no ha de repetirse dígito alguno?
9. Un programa consta de siete canciones. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las canciones en el programa?
10. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 6 personas en una hilera de 9 sillas?
11. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 8 libros en un estante si 3 libros determinados (a) no han de estar separados; (b) no han de quedar separados y además han de quedar en un orden particular?
12. Encuentre el número posible de arreglos de orden al bateo que pueden formarse en un equipo de 9 jugadores si el *pitcher* ha de batear al último.
13. Tenemos 5 libros diferentes de matemáticas, 4 libros diferentes de física y 2 libros diferentes de historia que han de colocarse en un estante de modo que los libros de cada tema queden contiguos. Encuentre el número de maneras en que pueden colocarse los libros.
14. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse usando todas las letras en (a) OHIO; (b) INDIANA; (c) ASAMAYAMA?
15. Encuentre el número de permutaciones que pueden formarse usando todas las letras en (a) ALABAMA; (b) ARKANSAS; (c) MISSISSIPPI.

16. ¿Cuántas señales pueden darse arreglando 9 banderas en una línea, si 4 son rojas, 3 son blancas, y 2 son azules?
17. Tenemos 5 ejemplares de un libro de matemáticas, 4 de un libro de física y 4 de un libro de historia por colocar en un estante. Si las cubiertas son de colores diferentes para cada tipo de libro, ¿de cuántas maneras visualmente diferentes, podemos colocar los libros en el estante?
18. ¿De cuántas maneras es posible que 10 clientes compren 5 latas de peras, 3 de piña y 2 de jitomate si cada cliente obtiene una lata?
19. Encuentre el número de maneras en que pueden distribuirse entre 12 muchachos dos monedas de 50 cts, 4 de veinticinco, y 6 de diez centavos si cada uno recibe una moneda.
20. Siete niños cogidos de la mano forman un círculo. ¿De cuántas maneras pueden formar un círculo? ¿De cuántas maneras pueden formar una línea?
21. Cinco niños y cinco niñas forman una línea alternando niños y niñas. Encuentre el número de maneras de hacer una línea. ¿De cuántas diferentes maneras podrían formar un círculo en el que los niños y las niñas estuvieran alternados?
22. Diez personas deben sentarse en una mesa redonda. Encuentre el número de arreglos posibles si el anfitrión y la anfitriona han de sentarse en puntos antipodales.
23. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa redonda si dos de ellas (a) han de quedar sentadas en lugares contiguos; (b) no han de tomar asientos contiguos?
24. Cuatro parejas han de tomar asiento alrededor de una mesa redonda. Encuentre el número de arreglos sin separar a las parejas.

## 12-4. COMBINACIONES

Una parte o la totalidad de un conjunto de objetos es llamado una *combinación*. Una combinación, en contraposición a una permutación, no involucra el orden de selección de los miembros de la combinación o su arreglo. Al elegir un comité dentro de un grupo de personas lo que interesa son los individuos que constituyen el comité más que cualquier arreglo de los integrantes del mismo. Cuando todos los objetos de un conjunto se toman a un tiempo, hay tan sólo una combinación. Pero una parte de un conjunto de objetos obviamente puede ser elegida en más de una manera. Vamos a interesarnos en aprender a determinar el número de combinaciones en situaciones de este tipo.

Las letras $a$, $b$, $c$, $d$ tomadas 3 a un tiempo tienen las combinaciones

$$a\,b\,c \qquad a\,b\,d \qquad a\,c\,d \qquad b\,c\,d$$

Cambiar el orden de una de estas combinaciones no nos conduce a una nueva combinación. Así, *abc* y *bca* son dos permutaciones de las mismas cosas, o en otras palabras, son la misma combinación.

Consideramos ahora el caso general del número de combinaciones de $n$ objetos tomando $r$ a la vez.

**Teorema 12-3.** Si $C(n, r)$ representa el número de combinaciones de $n$ objetos tomados $r$ a la vez ($r \leq n$), entonces

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{1}$$

o, también

$$C(n, r) = \frac{n!}{n!(n-r)!} \tag{2}$$

*Demostración.* Ahora cada combinación de $r$ objetos puede ser permutada en $r!$ maneras. Pero si cada una de estas combinaciones es así permutada, entonces todas las posibles permutaciones de $n$ objetos tomados $r$ a un tiempo han sido obtenidas. Así, por el Teorema 12-1

$$r!C(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

y

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

o

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \blacksquare$$

Cuando $r$ objetos son tomados de un grupo de $n$ objetos, nos quedan $n - r$ objetos. Así, vemos que para cada combinación de $r$ objetos hay una combinación correspondiente de $n - r$ objetos. Concluimos, por tanto, que el número de combinaciones de $n$ objetos tomados $r$ a un tiempo es igual al número de combinaciones de $n$ objetos tomados $n - r$ a un tiempo. A esta conclusión puede llegarse reemplazando $r$ por $n - r$ en la fórmula (2) de arriba. Esto conduce a

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Por tanto,

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

EJEMPLO 1. ¿De cuántas maneras puede elegirse un comité de entre 18 personas si el comité debe tener (a) 3 elementos; (b) 14 miembros?

*Solución.* (a) Deseamos encontrar el número de combinaciones de 18 objetos tomados 3 a un tiempo. Por tanto, por la fórmula (1),

$$C(18, 3) = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3!} = 816$$

(b) Podemos sustituir en la fórmula (1) y evaluar $C(18, 14)$, pero es más fácil recordar que $C(18, 14) = C(18, 4)$ y escribir

$$C(18, 4) = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3060$$

EJEMPLO 2. ¿De cuántas maneras pueden 7 maestros de matemáticas ser empleados de entre 10 maestros y 7 maestras solicitantes si (a) 3 han de ser hombres; (b) 3 o 4 han de ser hombres?

*Solución.* (a) Los tres hombres pueden ser elegidos en $C(10, 3)$ maneras distintas. Los 4 restantes pueden ser tomados de entre las maestras solicitantes de $C(7,4)$ maneras. Por tanto el número total de maneras es

$$C(10, 3) \cdot C(7, 4) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4200$$

(b) Para encontrar el número de maneras de llenar las vacantes con 3 o 4 hombres entre los empleados, agregamos al número de maneras que hay de llenar las vacantes con 3 hombres y 4 damas al número de maneras que hay de emplear 4 hombres y 3 damas. Esto es, tenemos

$$C(10, 3) \cdot C(7, 4) + C(10, 4) \cdot C(7, 3) = 4200 + 7350 = 11\,550$$

## *EJERCICIO 12-3*

1. Evalúe (a) $C(31, 2)$; (b) $C(26, 3)$; (c) $C(24, 4)$; (d) $C(13, 5)$.
2. Aprovechando plenamente las cancelaciones posibles, evalúe $C(16, 4)$ y $C(16,12)$ por la fórmula (1). Evalúe ambas cantidades usando la fórmula (2).
3. ¿Cuántas maneras distintas hay de formar un equipo de tenis de 4 elementos de entre 17 jugadores?
4. Doce personas se reúnen en un cuarto y cada una saluda a las demás con un apretón de manos. ¿Cuántos apretones de manos hubo?
5. Se marcan en un pizarrón 9 puntos, teniendo cuidado que no haya tres puntos colineales. ¿Cuántas líneas, cada una de ellas uniendo 2 de los puntos pueden ser trazadas? ¿Cuántos triángulos son determinados por medio de los puntos?
6. Encuentre el número de elecciones que tiene un estudiante para hacer 6 problemas de entre un conjunto de 11 problemas.
7. Se tienen 7 monedas que se lanzan al aire simultáneamente. ¿De cuántas maneras pueden caer 3 caras y 4 cruces?

8. ¿De cuántas maneras puede un comité de 5 ser elegido en un club de 12 miembros si (a) el presidente debe ser uno de los integrantes del comité; (b) no ha de ser electo para el comité; (c) dos miembros determinados rehúsan servir simultáneamente en el comité?
9. ¿De cuántas maneras puede una corte de 9 jueces tomar (a) una decisión por 5 contra 4; (b) una decisión por mayoría?
10. ¿Cuántos comités de 5 personas pueden constituirse contando con un grupo de 4 y otro grupo de 8 personas si el comité debe contar con 3 personas del primer grupo?
11. Se pretende formar un comité compuesto por 4 republicanos y 3 demócratas. Encuentre el número de elecciones posibles si se cuenta con 7 republicanos y 8 demócratas para la formación del comité.
12. El gerente de una tienda desea emplear 6 personas de entre 4 solicitantes de sexo masculino y 5 de sexo femenino. Encuentre las maneras de emplear a los seis si (a) 3 han de ser hombres; (b) 2 o 3 han de ser hombres.
13. ¿Cuántos grupos diferentes de 9 jugadores de béisbol pueden ser elegidos de entre 3 que tan sólo juegan la posición de *pitcher*, 2 que tan sólo juegan la posición de *catcher* y 14 que juegan en cualquier posición diferente de la de *catcher* o *pitcher*?
14. Encuentre el número de maneras que se tiene para elegir 8 de 10 libros distintos de matemáticas y 7 de física si (a) 5 han de ser libros de matemáticas; (b) 3 o 4 deben ser de física.
15. Encuentre el número de maneras que se tiene para elegir 9 pelotas de entre 6 rojas, 5 blancas, y 4 azules si cada elección consiste en 3 pelotas de cada color.
16. Un comité de 9 ha de ser elegido de entre 10 estudiantes de cuarto año, 8 de tercer año y 7 de segundo año. Encuentre el número de elecciones si el comité debe comprender 4 estudiantes de cuarto año, 3 de tercero y 2 de segundo.
17. Encuentre cuántas sumas de dinero, cada una consistiendo en tres o más monedas, pueden formarse si se dispone de 6 tipos distintos de moneda.
18. ¿De cuántas maneras puede elegirse un grupo de 3 o más de entre 8 personas?
19. Encuentre el número de maneras en que un bibliotecario puede prestar 8 libros distintos a 2 estudiantes, de modo que cada uno obtenga 4 libros. Sugestión: Encuentre el número de maneras que hay de dar 4 libros al primer estudiante.
20. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 6 libros entre 3 niños si cada niño debe recibir dos libros?
21. ¿De cuántas maneras pueden separarse 12 personas en dos grupos de 5 y 7, respectivamente.
22. Encuentre el número de maneras en que 11 personas pueden ser separadas en dos grupos de 5 y 6 si una persona determinada de las 11 ha de dar en el menor de los grupos.

## 12-5. PROBABILIDAD EN EVENTOS SIMPLES

La probabilidad es un tema fascinante y ha suscitado el interés de los matemáticos a lo largo de los dos a tres últimos siglos. La probabilidad recibió su primer ímpetu gracias a los juegos de azar, siendo más tarde altamente desarrollada; tiene ahora un amplio

e importante campo de aplicación en los seguros y ciencias sociales. Muchas personas que no han hecho un estudio formal o filosófico de la probabilidad tienen, sin embargo, algún entendimiento de su significado y aplicación. Como se entiende de costumbre, la probabilidad tiene algo que ver con la verosimilitud de la ocurrencia de los eventos. Es frecuente oír observaciones como "la probabilidad de la lluvia es 30%", "tiene una oportunidad de 1 contra 1 de ser elegido", "la probabilidad de un *knockout* en el primer *round* es pequeña". Pero los enunciados de este género, aunque dan una evaluación general, están lejos de ser explícitos. En enunciados de este tipo se han sacado conclusiones sin conocimiento pleno de la significación de las variables involucradas.

En nuestro estudio de la probabilidad, haremos una separación neta entre las condiciones que conducen al evento y las que se oponen al mismo. Aunque el tratamiento es totalmente elemental los principios que se introducen son fundamentales en la teoría de la probabilidad. Empezamos nuestro estudio examinando los posibles resultados de unos experimentos sencillos.

Consideremos primero el experimento de lanzar al aire una moneda. Obviamente, hay dos resultados posibles —la moneda caerá cara o caerá cruz—. Así, el conjunto de resultados posibles es $\{H,T\}$. A continuación, si consideramos el caso de un dado cuyas caras se han numerado del 1 al 6, el conjunto de resultados posibles es $\{1,2,3,4,5,6\}$. Los conjuntos de resultados en estos experimentos son llamados el espacio probabilístico para el lanzamiento de una moneda y el espacio probabilístico del lanzamiento de un dado. La idea de espacio probabilístico, que definimos ahora en general, es fundamental en la teoría de la probabilidad.

**Definición 12-2.** El *espacio probabilístico* $U$ de un experimento es el conjunto de los posibles resultados del experimento.

EJEMPLO 1. Supongamos que una urna contiene una bola blanca ($W$), una bola roja ($R$) y una bola verde ($G$), y que designamos el experimento de sacar una bola de la urna y en seguida otra bola. Para determinar el espacio probabilístico, observamos que la primera bola removida será $W$, $R$ o $G$. Si la primera bola es $W$, la siguiente bola será $R$ o $G$. Por tanto, hay dos posibles resultados si la primera bola es $W$. De manera semejante, hay dos posibles resultados si cualquiera de los otros dos colores aparece primero. Así, el espacio de probabilidad para este experimento es $\{WR, WG, RW, RG, GW, GR\}$. Cada elemento de este conjunto representa el orden en que las dos bolas son retiradas. Así, por ejemplo, $WR$ y $RW$ son elementos distintos.

Nos interesaremos a menudo en ciertas combinaciones de elementos del espacio probabilístico. Por ejemplo, quizás deseemos concentrar nuestra atención en los elementos 1, 2, 3 del espacio probabilístico del lanzamiento de un dado. Entonces, esta combinación de elementos, de acuerdo a la siguiente definición, es un evento.

**Definición 12-3.** Cualquier subconjunto del espacio probabilístico es llamado un *evento.*

Así, los subconjuntos para el experimento de lanzar una moneda, $U = \{H,T\}$, son

$$\varnothing, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}$$

Como vemos aquí, hay cuatro eventos asociados con el espacio probabilístico de dos elementos. El subconjunto $\varnothing$, sin embargo, que no tiene elementos, representa un evento imposible. Cualquiera de los dos subconjuntos con un solo elemento es un posible evento en el lanzamiento de una moneda, y el subconjunto con dos elementos es un evento que ocurre con toda certeza.

Si $A$ es un subconjunto de un espacio probabilístico $U$, denotaremos la probabilidad de la ocurrencia del evento $A$ en una de las realizaciones del experimento mediante $P(A)$. Requeriremos ahora que $P(A)$ se conforme a los siguientes axiomas:

**Axioma 12-1** $0 \leq P(A) \leq 1$

**Axioma 12-2** $P(U) = 1$

**Axioma 12-3** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

siempre que $A$ y $B$ sean subconjuntos ajenos de $U$.

El Axioma 12-1 establece cotas para la medida de la probabilidad de cualquier evento, de modo que la menor probabilidad es 0 y la mayor es 1. Así, asignamos 0 a la probabilidad de cualquier resultado que no puede ocurrir y 1 a la probabilidad de un evento que ocurre con toda seguridad. De acuerdo con esto, la probabilidad de obtener una bola roja de una bolsa que contiene sólo bolas blancas es 0, y a probabilidad de 1 bola blanca es 1. El Axioma 12-2 nos dice que con toda seguridad debe ocurrir alguno de los resultados del experimento al hacer un intento. En Axioma 12-3 enuncia que la probabilidad de la ocurrencia de ya sea el evento $A$ o el evento $B$ en un experimento, es igual a la suma de las probabilidades de los eventos separados, siempre que $A$ y $B$ no tengan elemento en común. El Axioma 12-3 puede ser extendido para incluir tres o más subcon-

juntos ajenos. Así, para tres subconjuntos ajenos la probabilidad del evento $A$ o el evento $B$ o el evento $C$ está dada por la ecuación

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

Hemos sido conducidos, intuitivamente, a pensar que en algunos experimentos los elementos de un espacio de probabilidad tienen todos la misma probabilidad. Esta situación se describe diciendo que los resultados son "igualmente verosímiles". Así, para el experimento de lanzar un dado, tenemos

$$P(U) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

Si las seis probabilidades son igualmente verosímiles, la probabilidad de que una cara en particular quede hacia arriba es 1/6. De manera semejante, en el lanzamiento de una moneda las probabilidades son $P(H) = \frac{1}{2}$ y $P(T) = \frac{1}{2}$. Y, en general, si un espacio probabilístico tiene $n$ elementos, cada uno con la misma probabilidad, entonces la probabilidad de la ocurrencia de cualquiera de ellos es $1/n$.

**Teorema 12-4.** Sea un espacio probabilístico $U$ con $n$ elementos, cada uno de los cuales tiene la misma probabilidad, y sea $A$, consistente en $k$ elementos, un subconjunto de $U$. Entonces, la probabilidad de la ocurrencia de alguno de los elementos de $A$ es igual a $k/n$.

*Demostración.* Denotando los elementos de $A$ mediante $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_k$, tenemos

$$\begin{aligned} P(a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup \cdots \cup a_k) &= P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + \cdots P(a_k) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= \frac{k}{n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Este teorema dice que la probabilidad de un evento es igual al número de maneras posibles en el cual un evento puede ocurrir dividido por el número de posibles resultados del experimento. Observamos que $k$ en el teorema puede ser cualquier entero desde 1 a $n$ inclusive.

EJEMPLO 2. Seis monedas se lanzan simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) todas sean caras, (b) 3 sean caras y 3 sean cruces?

*Solución.* (a) Hay dos maneras en que puede caer una moneda, y, por el Principio Fundamental (Sec. 12-1), seis monedas pueden caer en $2^6 = 64$ maneras. Obtener únicamente caras, se puede de una sola manera. Por tanto, la probabilidad de obtener solamente caras es $\frac{1}{64}$.

(b) Tres monedas determinadas pueden caer cara y las restantes cruz de una sola manera. Pero tres monedas pueden ser elegidas en $C(6, 3) = 20$ maneras. Por tanto, la probabilidad de 3 caras y 3 cruces es 5/16.

EJEMPLO 3. Los nombres de 5 muchachos y 4 muchachas están escritos en unas tarjetas. Si 6 de las tarjetas son tomadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener los nombres de 3 muchachos y 3 muchachas?

*Solución.* Hay $C(5, 3)$ maneras de obtener los nombres de 3 muchachos y $C(4, 3)$ maneras de obtener los nombres de 3 muchachas. Por tanto, $C(5, 3) \cdot C(4, 3)$ es el número de maneras en que puede ocurrir el evento; pero el número total de maneras de obtener 6 nombres es $C(9, 6)$. Por tanto,

$$P(\text{3 muchachos y 3 muchachas}) = \frac{C(5, 3) \cdot C(4, 3)}{C(9, 6)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

Teorema 12-5. Si $A$ y $A'$ son subconjuntos suplementarios de un espacio probabilístico $U$, entonces $P(A) = 1 - P(A')$.

*Demostración.* Puesto que $U = A \cup A'$ y $A \cap A' = \varnothing$, tenemos

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(A) = 1 - P(A') \quad \blacksquare$$

Notamos que $P(A)$ es la probabilidad de que el evento $A$ ocurra y $P(A')$ es la probabilidad de que el evento no ocurra.

EJEMPLO 4. Una pareja de dados es lanzada al aire. Encontrar la probabilidad de que la suma de los números que se obtengan sea 11.

*Solución.* La suma de los números puede encontrarse entre 2 y 12, inclusive. Para encontrar las probabilidades de obtener las sumas de 2 a 10 inclusive debemos realizar muchos cálculos. Por tanto, atacamos este problema encontrando las probabilidades de obtener 11 o 12. En estas condiciones,

$$A' = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

lo cual quiere decir que hay dos maneras de conseguir 11 o 12 y una de obtener 12. En este experimento $U = 6 \cdot 6 = 36$ y, consecuentemente,

$$P(A') = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12} \quad \text{y} \quad P(A) = 1 - \tfrac{1}{12} = \tfrac{11}{12}$$

## *EJERCICIO 12-4*

1. Hay ocho bolas blancas y 2 bolas negras en una caja. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola ésta sea (a) negra, (b) blanca?
2. Si se lanza un dado, encuentre la probabilidad de que caiga (a) en la cara del 1 o del 2, (b) en la cara del cuatro, cinco o seis.
3. Dos monedas son lanzadas simultáneamente. Encuentre la probabilidad de que (a) ambas caigan cara, (b) una caiga cara y la otra cruz.
4. En un lanzamiento de dos dados encuentre la probabilidad de que (a) ambos dados caigan en la cara del uno, (b) la suma de los puntos sea siete, (c) uno y sólo un dado nos dé 6 puntos.
5. Lanzamos 5 monedas simultáneamente. Encuentre la probabilidad de que (a) todas caigan cara, (b) 4 caigan cara y una cruz, (c) obtengamos 2 caras y 3 cruces.
6. En un examen, las preguntas y las respuestas están colocadas en dos columnas paralelas y se pide al estudiante que haga el apareamiento correcto. Un estudiante logra aparear todas las preguntas con sus respuestas, exceptuando 5 de ellas. Esta parte de la prueba la realiza simplemente por tanteo. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) tenga éxito en los 5 apareamientos, (b) tenga éxito en tan sólo 3 apareamientos?
7. Un niño juega con los cubos numerados del 1 al 5 y los coloca en una hilera. ¿Cuál es la probabilidad de que el número así formado sea (a) menor que 20 000, (b) mayor que 40 000?
8. En una fiesta, 8 hombres toman al azar cada uno una tarjeta de entre 8 que llevan los nombres de sus esposas. ¿Cuál es la probabilidad de que cada hombre obtenga la tarjeta correspondiente a su esposa?
9. Se toman tres bolas de una bolsa que contiene 6 rojas y 5 negras. Encuentre la probabilidad de que (a) todas sean rojas, (b) todas sean negras, (c) 2 sean rojas y 1 negra.
0. Se lanzan 5 monedas simultáneamente. Encuentre la probabilidad de que (a) por lo menos se obtenga una cara, (b) por lo menos se obtengan 2 caras.
1. Un comité de 5 miembros es elegido de entre un grupo de 5 estudiantes de cuarto y 5 de tercero, por lotería. Encuentre la probabilidad de que el comité consista en (a) 3 de cuarto año y 2 de tercero, (b) por lo menos 2 de cuarto, (c) por lo menos 1 de tercero.
2. Se toman tres bolas de una bolsa que contiene 6 verdes, 7 negras y 8 amarillas. Encuentre la probabilidad de que (a) sean de colores distintos, (b) sean todas del mismo color.
3. Si de un juego de 52 cartas tomamos dos, ¿cuál es la probabilidad de que (a) ambas sean reinas, (b) corazones, (c) del mismo palo?
4. De un juego de 52 cartas tres van a retirarse. Encuentre la probabilidad de que todas sean (a) corazones, (b) del mismo palo, (c) de palos distintos.

15. Ocho niños, 4 chicos y 4 chicas, echan suertes para colocarse en una línea. Encuentre la probabilidad de que (a) los chicos queden juntos en la línea, (b) una pareja determinada quede junta con la línea.
16. Diez personas, 5 chicos y 5 chicas, se agrupan en parejas. Si las parejas se forman al azar, encuentre la probabilidad de que cada chico tenga como pareja a una chica.
17. Cinco hombres y 5 mujeres toman asiento alrededor de una mesa redonda. Si la anfitriona se reserva un lugar y los demás toman su lugar al azar, encuentre la probabilidad de que las mujeres y los hombres alternen.
18. De una mesa se toman, uno tras otro y al azar, 8 libros, 5 de los cuales son rojos y tres verdes. Encuentre la probabilidad de que (a) todos los libros rojos se tomen al principio, (b) todos los libros de un solo color sean tomados al principio.

## 12-6. PROBABILIDAD EN EVENTOS MULTIPLES

En la sección precedente empleamos el Teorema 12-4 para encontrar la probabilidad de un evento $A$. En esta sección consideraremos la probabilidad de dos o más eventos.

**Teorema 12-6.** Si $A$ y $B$ son subconjuntos de un espacio de probabilidad $U$, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

*Demostración.* Si $A$ y $B$ son conjuntos ajenos, $A \cap B = \varnothing$ y la ecuación es válida por el Axioma 12-3, Sec. 12-5. Suponemos, entonces, que $A$ y $B$ contienen uno o más elementos en común de $U$. Bajo esta condición, la suma $P(A) + P(B)$ incluye dos veces la probabilidad de los elementos comunes. Esta suma, por tanto, necesita ser disminuida en $P(A \cap B)$. Por tanto, la probabilidad de que al menos uno de los dos eventos ocurra, es igual a la suma de las probabilidades de los eventos separados menos la probabilidad de la ocurrencia simultánea de ambos eventos. ■

EJEMPLO 1. De un juego de 52 cartas se saca una. Encontremos la probabilidad de que la carta sea una reina o un corazón.

*Solución.* Sea $A$ el conjunto de reinas y $B$ el conjunto de corazones. Entonces $A \cap B$ = {reina de corazones} y, por tanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \tfrac{4}{52} + \tfrac{13}{52} - \tfrac{1}{52} = \tfrac{4}{13}$$

**Definición 12-4.** Si la ocurrencia de un evento $A$ no afecta a la ocurrencia de otro evento $B$, entonces el evento $B$ es llamado *independiente* del evento $A$. Sin embargo, si la probabilidad de evento $B$ es afectada por la ocurrencia previa del evento $A$, entonces se dice que $B$ es *dependiente* de $A$.

Si un evento $B$ depende de un evento $A$, la probabilidad de $B$ después de la ocurrencia de $A$ es denotada mediante $P(B|A)$. Si $B$ es independiente de $A$, entonces

$$P(B|A) = P(B)$$

EJEMPLO 2. Supongamos que una bolsa contiene 4 bolas verdes y 3 rojas, y que $A$ representa el evento que consiste en sacar una bola roja de la bolsa y $B$ consiste en el evento de sacar una bola verde después de haber ocurrido el evento $A$. Una vez sacada una bola roja, la bolsa contiene tan sólo 2 rojas y 4 verdes. Por tanto, la probabilidad de que la segunda bola sacada sea verde es

$$P(B|A) = \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3}$$

Sin embargo, si la bola roja es reemplazada antes de retirar la segunda, entonces el evento $B$ es independiente del evento $A$. Así, en este caso $B$ representa el evento de sacar una bola verde de una bolsa que contiene 4 verdes y 3 rojas, y, consecuentemente,

$$P(B|A) = P(B) = \tfrac{4}{7}$$

**Teorema 12-7.** Si $A$ y $B$ son eventos en un espacio probabilístico, entonces

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

*Demostración.* Si $n_1$ es el número de maneras en que $A$ puede ocurrir y $N_1$ es el número de maneras en que $A$ puede ocurrir o dejar de ocurrir, entonces $P(A) = n_1/N_1$. Después de ocurrido $A$, sea $n_2$ el número de maneras en que $B$ puede ocurrir y $N_2$ el número, de formas en que $B$ puede ocurrir o dejar de hacerlo. Entonces, $P(B|A) = n_2/N_2$. Por el Principio Fundamental (Sec. 12-1), ambos eventos pueden ocurrir de $n_1n_2$ maneras de entre un total de $N_1N_2$ formas en que pueden ocurrir o no. Por tanto,

$$P(A \cap B) = \frac{n_1n_2}{N_1N_2} = \frac{n_1}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} = P(A) \cdot P(B|A) \quad \blacksquare$$

Observamos que si el evento $B$ es independiente del evento $A$, entonces $P(B|A) = P(B)$, y, por tanto, la fórmula viene a ser

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EJEMPLO 3. De un juego de 52 cartas sacamos una y en seguida sacamos otra más. Encontrar la probabilidad de que la primera carta sea un pico y que la segunda sea un diamante si (a) la primera carta se restituye después de haberla sacado, (b) la primera carta no es restituida.

*Solución.* (a) La probabilidad de sacar un pico la primera vez es 1/4 y la probabilidad de un diamante en el segundo retiro es también 1/4. Por tanto, la probabilidad de ocurrencia de ambos eventos es 1/16.

(b) Después del evento de retirar un pico, el juego tiene 51 cartas, 13 de las cuales son diamantes. Por tanto, la probabilidad de un pico S y luego un diamante C es

$$P(S \cap C) = P(S) \cdot P(C|S) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{13}{51} = \tfrac{13}{204}$$

El Teorema 12-7 puede ser extendido para la inclusión de 3 o más eventos. Así, denotando $P(B|A)$ para la probabilidad de un evento $B$ después de la ocurrencia de un evento $A$ y $P(C|A \cap B)$ denotando la probabilidad de la ocurrencia de un evento $C$ después de la ocurrencia de $A$ y luego $B$, tenemos

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Si los eventos son independientes, la fórmula para la probabilidad de $A$, $B$ y $C$ viene a ser

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

## *EJERCICIO 12-5*

1. Tenemos los eventos $A$ y $B$ de un espacio probabilístico $U$

$$A = \{3, 4, 5\}, \qquad B = \{1, 3, 4, 6\}, \qquad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   Encuentre $P(A \cup B)$ (a) usando el teorema 12-6, (b) usando el hecho de que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. De una caja que contiene 4 bolas rojas y 5 verdes se toma una. Se restituye a la caja y luego se toma una segunda bola. Encuentre la probabilidad de que (a) ambas sean rojas, (b) ambas sean verdes, (c) la primera sea roja y la segunda verde.
3. Repita el Prob. 2 si la primera bola no es restituida.
4. Se lanza una misma moneda en sucesión tres veces; encuentre la probabilidad de que (a) se tenga una cara cada vez, (b) se obtenga primero cara y después cruz en los demás lanzamientos.
5. De cada uno de los tres juegos de 52 cartas tomamos una. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) todas sean ases, (b) todas las cartas tengan caras, (c) todas sean picos?
6. Retiramos tres cartas de un juego de barajas, en sucesión y sin restituir. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) todas sean ases, (b) todas sean caras, (c) todas sean picos?
7. Si la probabilidad de que un vendedor logre vender una casa es de 2/3 y la probabilidad de que logre vender una segunda casa es ½, encuentre la probabilidad de que (a) tenga éxito en ambas ventas, (b) fracase en ambas ventas, (c) logre vender la primera casa, pero no la segunda.

8. La entrada a una tienda tiene 4 puertas. ¿Cuál es la probabilidad de que los próximos tres clientes, viniendo separadamente, entren (a) por la misma puerta, (b) por puertas distintas?
9. Los nombres de 9 estudiantes de primer año, 8 de segundo y 7 de tercero se escriben en unas tarjetas y se colocan en una caja. Si se retiran tres tarjetas de la caja, una tras otra, encuentre la probabilidad de obtener los nombres de (a) 3 estudiantes de primero, (b) uno de cada clase, (c) todos de una sola clase.
10. Un estudiante va a presentar 3 exámenes. Si las probabilidades separadas de pasar los exámenes son 4/5, 3/4 y 2/3, encuentre la probabilidad de que tenga éxito (a) en todos los exámenes, (b) en ninguno de ellos, (c) en exactamente dos de los exámenes.
11. El ingreso a una organización requiere que un candidato pase al menos dos de tres pruebas. Si las probabilidades separadas de pasar las pruebas son 2/3, 1/4 y 4/5, encuentre la probabilidad de que el candidato alcance el ingreso a la organización.
12. Se retiran tres bolas de una caja, en sucesión y sin restitución. Si la caja tenía 5 bolas blancas y 7 verdes, encuentre la probabilidad de que las 3 bolas retiradas lo sean en el orden (a) blanca, verde, verde, (b) blanca, blanca, verde, (c) verde, verde, verde.
13. Tenemos en una caja los nombres de 6 muchachas y 5 muchachos escritos cada uno en una tarjeta distinta. Encuentre la probabilidad de que (a) retiremos los nombres de las muchachas primero, (b) al retirar las tarjetas alternen los nombres de las muchachas y los muchachos.
14. Se retiran tres bolas de una caja, en sucesión y sin restitución. Si la caja tenía 5 bolas rojas, 6 blancas y 7 azules, encuentre la probabilidad de que las tres bolas retiradas fueron (a) del mismo color, (b) de diferente color.
15. Para determinar quién ha de hacer cierto trabajo, tres hombres comparan tres monedas, habiendo acordado que la que presente distinta cara a los otras dos deberá determinar al hombre que realizará el trabajo. Encuentre la probabilidad de que la decisión pueda tomarse (a) en el primer intento, (b) en el segundo.
16. Repetir el Prob. 15 suponiendo que la moneda distinta dispensa a su dueño de hacer el trabajo y que después los dos hombres restantes echan suertes.
17. Una urna contiene 5 bolas negras y 2 verdes; otra contiene 3 bolas negras y 3 verdes. Si una bola ha de sacarse, ¿cuál es la probabilidad de obtener (a) una negra, (b) una verde?
18. A, B y C van a decidir sobre quién ha de realizar una cierta tarea. A y B realizan una lotería y el perdedor juega entonces con C. Encuentre la probabilidad de cada hombre con respecto a la realización del trabajo. Si la probabilidad de que una persona reciba la suma de $A$ dólares es $p$, entonces $pA$ es llamado el *valor de su esperanza*.
19. Un hombre tiene tres apuestas en una carrera de caballos. El supone que las probabilidades separadas para sus caballos son 1/3, 1/4 y 1/6. Sobre esta base, encuentre la probabilidad de que uno de sus caballos gane. Si hay un premio se $500 para el ganador, ¿cuál es el valor de la esperanza del hombre?
20. Las probabilidades separadas de que los tiradores A, B y C toquen cierto blanco son 2/3, 3/4 y 4/5. Si los disparos se hacen en el orden A, B y C,

el primero en tocar el blanco obtiene un premio de $100, pero cada tirador tiene derecho a un total de tres disparos. Encuentre el valor de la esperanza matemática de cada tirador.

21. Una persona retira sucesivamente tres bolas de una caja que contiene 5 rojas, 6 amarillas y 7 verdes. La persona puede recibir un premio de $100 si las bolas son retiradas en el orden rojo, amarillo y verde. Encuentre el valor de su esperanza matemática si (a) cada bola es restituida antes del retiro de la segunda, (b) si las bolas no son restituidas.
22. Encuentre el valor de la esperanza matemática de un hombre que realiza el experimento del Prob. 21 si se le otorga una segunda oportunidad en el caso de falla en el primer intento.

## 12-7. PROBABILIDADES EN INTENTOS REPETIDOS

Consideremos un tipo común de experimento en el cual el resultado de un intento es independiente del resultado de cualquier otro. Encontremos, entonces, la probabilidad de que un evento $A$ ocurra 0, 1, 2, 3, etc., en $n$ intentos.

Escribimos $p$ para la probabilidad de que $A$ ocurra en un solo intento y $q$ para la probabilidad de que $A$ no ocurra. Claramente, la probabilidad de que $A$ no ocurra después de los $n$ intentos es $q^n$. La probabilidad de ocurrencia de $A$ en un intento determinado y fracaso en todos los demás intentos es $pq^{n-1}$. Pero la ocurrencia puede tener lugar en cualquiera de los $n$ intentos y, por tanto, de $C(n, 1)$ maneras. Así, la probabilidad para una y sólo una ocurrencia de $A$ es $C(n, 1)pq^{n-1}$. De manera similar, la probabilidad de que $A$ ocurra en $r$ determinados intentos y no ocurra en los restantes $n-r$ intentos es $p^rq^{n-r}$. Puesto que las $r$ ocurrencias de $A$ pueden tener lugar en $C(n, r)$ maneras, concluimos que la probabilidad de que $A$ ocurra exactamente $r$ veces en $n$ intentos es $C(n, r)p^rq^{n-r}$. Enunciamos este resultado como un teorema.

**Teorema 12-8.** Si $p$ es la probabilidad de que un evento ocurra en un solo intento de un experimento y si la probabilidad de que el evento no ocurra es $q$, entonces la probabilidad de que el evento ocurra exactamente $r$ veces en un intento es

$$C(n, r)p^rq^{n-r}$$

EJEMPLO. En 4 lanzamientos de un dado, ¿cuál es la probabilidad de que (a) se obtengan exactamente 2 ases, (b) se obtengan 2 o más ases?

*Solución.* (a) La probabilidad de 1 as (en un solo lanzamiento) es 1/6, y de fracaso 5/6. Por tanto, la probabilidad de dos ases es

$$C(n, r)p^rq^{n-r} = C(4, 2)(\tfrac{1}{6})^2(\tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{25}{216}$$

(b) la probabilidad de 2, 3 o 4 ases es igual a la suma de las probabilidades separadas de estos eventos. Por tanto, tenemos

$$C(4, 2)(\tfrac{1}{6})^2(\tfrac{5}{6})^2 + C(4, 3)(\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6}) + (\tfrac{1}{6})^4 = 150(\tfrac{1}{6})^4 + 20(\tfrac{1}{6})^4 + (\tfrac{1}{6})^4$$

$$= \frac{171}{6^4} = \frac{171}{1296}$$

## *EJERCICIO 12-6*

1. Se lanza una moneda 4 veces. Encuentre la probabilidad de (a) obtener 2 caras exactamente, (b) obtener 3 caras exactamente, (c) menos de dos caras.
2. Encuentre la probabilidad de que en tres lanzamientos de un dado (a) no se obtenga un solo seis, (b) un solo seis, (c) 2 o 3 seises.
3. Una caja contiene 4 bolas rojas y 3 blancas. Si retiramos 4 bolas en sucesión y con restitución, encuentre la probabilidad de que (a) todas sean blancas, (b) exactamente dos sean blancas, (c) 3 o más sean rojas.
4. En 6 lanzamientos de una moneda, encontrar las probabilidades de exactamente 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 caras. ¿Cuál es el número de caras más probable?
5. La probabilidad de que un cierto jugador logre un "hit" en una vez al "bat" es 0.3. Encuentre la probabilidad de que en 4 veces al "bat" (a) no haya un solo "hit", (b) logre exactamente un "hit", (c) pegue más de un "hit".
6. Si la probabilidad de que un tirador alcance un blanco es de 0.9, encuentre la probabilidad de que en 4 intentos (a) no logre el blanco, (b) alcance el blanco exactamente tres veces, (c) tenga 4 éxitos.
7. La probabilidad de que el equipo $A$ gane un partido de básquetbol frente al equipo $B$ es 0.4. En una serie de 5 juegos, ¿cuál es el número más probable de victorias de $A$? ¿Tiene $A$ más probabilidad de ganar exactamente 1 juego o exactamente 3?

Capítulo 13

# EL TEOREMA DEL BINOMIO Y LA INDUCCION MATEMATICA

## 13-1. LA EXPANSION BINOMIAL

En el Cap. 3 vimos cómo escribir el cuadrado y el cubo de un binomio. Deseamos describir ahora la expansión de una potencia entera de un binomio.

Podemos mostrar, por multiplicación, que

$$(a + x)^1 = a + x$$

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$(a + x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

$$(a + x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$$

Los miembros derechos de estas identidades son las formas desarrolladas de las potencias enteras positivas de $a + x$ desde la primera hasta la quinta potencia. En cada una de las expansiones podemos observar los siguientes hechos:

1. El número de términos en cada expansión es una unidad mayor que el exponente que afecta al binomio.
2. El primer término es $a$ elevado a la misma potencia a la que está elevado el binomio, y el exponente decrece en 1 al pasar de un término al siguiente.
3. El exponente de $x$ en el segundo término es 1 y dicho exponente crece en 1 unidad al pasar de un término al siguiente.
4. La suma de los exponentes de $a$ y $x$ en cualquier término es igual al exponente del binomio.

5. Los coeficientes de los términos equidistantes del primero y último términos son iguales.
6. El coeficiente del segundo término es el mismo que el exponente del binomio. El coeficiente de cualquier término subsiguiente puede calcularse a partir del término previo multiplicando el coeficiente de dicho término por el exponente de $a$ y dividiendo por el número entero que es 1 unidad mayor que el exponente de $x$.

El estudiante deberá verificar el sexto punto anterior en las expansiones precedentes. Para verificar la expansión de $(a + x)^5$, observamos que el segundo término es $5a^4x$. Entonces, el coeficiente del siguiente término es $(5 \cdot 4) \div 2 = 10$, lo que nos da $10a^3x^2$ para el tercer término. Continuando de acuerdo a este sencillo esquema obtenemos el desarrollo.

Resulta natural preguntar si los puntos 1 al 6 son válidos para $(a + x)^n$, donde $n$ es cualquier entero positivo. Contestamos a esta pregunta comprobando el llamado *teorema binomial.*

**Teorema 13-1.** Si $n$ es cualquier entero, entonces

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}x^4 + \cdots + x^n \qquad (1)$$

*Demostración.* Por definición $(a + x)^n$ significa el producto de $n$ factores, cada uno de los cuales es igual a $a + x$. Por tanto,

$$(a + x)^n = (a + x)(a + x)(a + x)\cdots(a + x) \qquad n \text{ factores}$$

Por el axioma distributivo sabemos que la expansión consiste en la suma de todos los posibles productos formados tomando un término de cada uno de los $n$ factores. Así pues, eligiendo $a$ de cada factor, tenemos el producto $a^n$. Claramente, hay tan sólo una manera de formar este producto. Si elegimos $a$ de todos salvo uno de los factores y $x$ del factor restante, obtenemos el producto $a^{n-1}x$. Pero $x$ puede tomarse en cualquiera de los $n$ factores. Por tanto, $a^{n-1}x$ ocurre $n = C(n, 1)$ veces, dando $C(n, 1)a^{n-1}x$ como un término de la expansión. Ahora, más generalmente, supongamos que se ha elegido $a$ de $n-r$ de los factores y $x$ de los restantes $r$ factores. Esto puede hacerse de $C(n, r)$ veces, lo cual nos da $C(n, r)a^{n-r}x^r$ como un término de la expansión. Usando la definición de $C(n, r)$, podemos escribir

$$C(n, r)a^{n-r}x^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r \qquad (2)$$

Si damos a $r$, sucesivamente, los valores 1, 2, 3, . . . , $n$, obtenemos en orden los términos de la expansión que siguen al término $a^n$. Notamos que la expansión así obtenida concuerda con el miembro derecho de la Ec. (1) y, por tanto, se ha demostrado el teorema. ■

Los coeficientes en (1) son llamados los *coeficientes binomiales*. Estos, como hemos visto, pueden ser expresados en la notación de combinaciones. Esto nos permite escribir (1) en la forma más compacta:

$$(a + x)^n = a^n + C(n, 1)a^{n-1}x + C(n, 2)a^{n-2}x^2 + \cdots$$
$$+ C(n, r)a^{n-r}x^r + \cdots + C(n, n-1)ax^{n-1} + C(n, n)x^n \qquad (3)$$

El teorema binomial provee una fórmula para escribir la expansión de cualquier potencia entera de un binomio. Examinando la fórmula (1), vemos que los coeficientes binomiales después del segundo término pueden calcularse de acuerdo al punto 6. Y, como anticipamos, los coeficientes equidistantes desde el primero y último términos son iguales. Esta conclusión se infiere del hecho de que $C(n, r) = C(n, n-r)$. Por tanto, los coeficientes en la primera mitad de una expansión pueden usarse, en orden inverso, como los coeficientes en la segunda mitad, siempre y cuando la expansión tenga un número par de términos. Si la expansión tiene un número impar de términos, los coeficientes equidistantes del término medio son iguales. Esta propiedad de los coeficientes binomiales puede usarse con mucha ventaja.

Examinando el miembro derecho de la Ec. (3), vemos que $x$, $x^2$, $x^3$, y así sucesivamente, son los factores respectivos del segundo, tercero, cuarto, y así sucesivamente, términos de la expansión. De acuerdo con esto, el $r$-ésimo término de la expansión está dado por $C(n, r-1)a^{n-r+1}x^{r-1}$. Por tanto, podemos escribir

$$r\text{-ésimo término} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} \qquad (4)$$

Ahora tenemos información suficiente para encontrar cualquier término de la expansión binomial sin encontrar los términos previos. El primero y segundo términos, por supuesto, pueden escribirse de inmediato, y la fórmula (4) nos proporcionará rápidamente cualquier otro término que se desee asignando a $r$ el valor apropiado.

EJEMPLO 1. Desarrollemos $(2 + x)^6$ y simplifiquemos cada término.

*Solución.* Aplicando la fórmula (1) con $a = 2$ y $n = 6$, obtenemos

$$(2 + x)^6 = 2^6 + 6(2)^5x + \frac{6 \cdot 5}{2!}(2)^4x^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!}(2)^3x^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!}(2)^2x^4$$

$$+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5!}(2)x^5 + x^6$$

$$= 64 + 192x + 240x^2 + 160x^3 + 60x^4 + 12x^5 + x^6$$

En este ejemplo expresamos el coeficiente binomial de cada término independientemente de cualquier otro. El desarrollo puede escribirse más convenientemente calculando los coeficientes después del segundo término de acuerdo con el punto 6. Ilustramos este procedimiento en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2. Desarrollemos $(a^2 + 3y)^7$ y simplifiquemos cada término.

*Solución.*

$$(a^2 - 3y)^7 = (a^2)^7 + 7(a^2)^6(3y) + 21(a^2)^5(3y)^2 + 35(a^2)^4(3y)^3$$

$$+ 35(a^2)^3(3y)^4 + 21(a^2)^2(3y)^5 + 7(a^2)(3y)^6 + (3y)^7$$

$$= a^{14} + 21a^{12}y + 189a^{10}y^2 + 945a^8y^3 + 2835a^6y^4$$

$$+ 5103a^4y^5 + 5103a^2y^6 + 2187y^7$$

EJEMPLO 3. Desarrollemos $(a - x)^6$ y simplifiquemos cada término.

*Solución.* Observando que $(a - x) = a + (-x)$, tenemos

$$[a + (-x)]^6 = a^6 + 6a^5(-x) + 15a^4(-x)^2 + 20a^3(-x)^3$$

$$+ 15a^2(-x)^4 + 6a(-x)^5 + (-x)^6$$

Por tanto,

$$(a - x)^6 = a^6 - 6a^5x + 15a^4x^2 - 20a^3x^3 + 15a^2x^4 - 6ax^5 + x^6$$

Los signos se alternan aquí, como será siempre el caso en que el binomio es la diferencia de dos cantidades.

EJEMPLO 4. Escribamos y simplifiquemos el séptimo término de la expansión de $(2x - y)^{11}$.

*Solución.* Empleando la fórmula (4) con $n = 11$ y $r = 7$, obtenemos

$$7_0 \text{ término} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6!}(2x)^5(-y)^6$$

$$= 462(2x)^5(-y)^6 = 14{,}784x^5y^6$$

EJEMPLO 5. Encontremos el término que involucra $x^9$ en la expansión de $[x^2 + (1/x)]^{12}$.

*Solución.* Usando $n = 12$, encontramos que el $r$-ésimo término de la expansión, omitiendo el valor numérico del coeficiente, es dado por

$$(x^2)^{12-r+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{r-1} = x^{26-2r} \cdot x^{1-r} = x^{27-3r}$$

Entonces, $27 - 3r$ debe ser igual a 9 y, por tanto, $r = 6$. Usando este valor de $r$ y la fórmula (4), tenemos

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(x^2)^7\left(\frac{1}{x}\right)^5 = 792x^9$$

## EJERCICIO 13-1

Desarrolle cada una de las siguientes expresiones algebraicas y simplifique cada uno de los términos.

1. $(2a + y)^3$
2. $(3a - 2y)^4$
3. $(a - x)^5$
4. $(2m - 3n)^5$
5. $(3m + n^2)^5$
6. $(1 + 2x)^6$
7. $(a + x)^8$
8. $(n^2 + 3m)^6$
9. $(x - y)^8$
10. $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^6$
11. $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^6$
12. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^7$
13. $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^5$
14. $\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{y}\right)^6$
15. $\left(\frac{a^2}{4} - \frac{2}{a}\right)^6$

Encuentre el término especificado en cada una de las siguientes potencias. No encuentre los términos que le preceden.

16. $(a + x)^8$; 5o. término
17. $(a - x)^7$; 4o. término
18. $(m - 3)^7$; 4o. término
19. $(x - 1)^{11}$; 8o. término
20. $(2x - y)^{10}$; 7o. término
21. $(2a^2 + 1)^{12}$; 9o. término
22. $(2x^2 - y^2)^{13}$; 10o. término
23. $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b)^{10}$; término medio
24. $(a + \frac{1}{2}b)^{10}$; término medio
25. $\left(a + \frac{b}{2}\right)^{12}$; término medio
26. $(x^2 - y^2)^{14}$; término medio
27. $(3x^2 + 2y)^8$ término medio
28. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$; término libre de literales
29. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$; término libre de literales
30. $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^9$; término libre de literales
31. $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{13}$; término que involucra a $x^3$

Emplee suficientes términos de la expansión binomial para evaluar cada una de las siguientes expresiones hasta el tercer decimal.

32. $(1.01)^7 = (1 + .01)^7$
33. $(1.02)^6$
34. $(0.99)^5$
35. $(0.98)^6$
36. $(1.01)^{10}$
37. $(0.98)^8$

38. Demuestre que el número total de combinaciones de $n$ objetos tomados sucesivamente 1 a la vez, 2 a la vez, 3 a la vez, etc., hasta $n$ a la vez, es igual a $2^n-1$. Sugestión: Desarrolle $(1 + 1)^n$, expresando los coeficientes binomiales como en la fórmula (3).

Los coeficientes binomiales de las expansiones de $(a + x)^n$ desde $n = 0$ hasta $n = 6$ aparecen en un arreglo triangular que damos a continuación y que es llamado el *triángulo de Pascal.* Los números primero y último de cada fila son iguales a 1; y cualquier otro de los números, comenzando en la tercera fila, es igual a la suma de los dos números contiguos de la fila inmediatamente superior.

$$
\begin{array}{ll}
(a+x)^0 & \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \\
(a+x)^1 & \qquad\qquad\qquad\quad 1 \quad 1 \\
(a+x)^2 & \qquad\qquad\qquad 1 \quad 2 \quad 1 \\
(a+x)^3 & \qquad\qquad\quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(a+x)^4 & \qquad\qquad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(a+x)^5 & \qquad\quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
(a+x)^6 & \qquad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

39. Forme el triángulo de Pascal de diez filas. Emplee los números de la décima fila para escribir el desarrollo de $(a + x)^9$.

## 13-2. LA SERIE BINOMIAL

Hasta este momento hemos considerado binomios cuyos exponentes son enteros positivos. Supongamos ahora que $n$ es cualquier número distinto de un entero positivo. Consideremos la expresión usual,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots$$

Observando el coeficiente del $(r + 1)$-ésimo término vemos que el factor $(n - r + 1)$ es igual a 1 cuando $r = n$, siempre que $n$ es un entero positivo, y es igual a 0 cuando $r = n + 1$. Por tanto, la expansión termina con el $(n + 1)$-ésimo término. Pero en caso de que $n$ sea distinto de un entero positivo ningún coeficiente binomial podrá tener a 0 como factor. En este caso la expansión es infinita, y es llamada una *serie binomial.* Podemos, sin embargo, escribir tantos términos como deseemos de una serie tal. Hay situaciones matemáticas en las que los primeros términos de una serie binomial proporcionan resultados útiles, siempre y cuando se elijan valores de $x$ entre $-1$ y 1. No debemos dar una demostración de este enunciado. Este asunto se considera en el cálculo diferencial.

EJEMPLO 1. Encontremos los primeros cuatro términos de la expansión de $(1 + 2x)^{-1/2}$.

*Solución.* Aplicando la fórmula binomial (1), Sec. 13-1, tenemos

$$(1 + 2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}(2x) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(2x)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(2x)^3 + \cdots$$

$$= 1 - x + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{5}{2}x^3 + \cdots$$

EJEMPLO 2. Encontremos aproximadamente $\sqrt[4]{15}$.

*Solución.* Para aplicar el teorema del binomio, escribimos

$$\sqrt[4]{15} = (16 - 1)^{1/4} = [16(1 - \tfrac{1}{16})]^{1/4} = 2(1 - \tfrac{1}{16})^{1/4}$$

Entonces

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})}{2!}\left(-\frac{1}{16}\right)^2 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{64} + \frac{-3}{8192} - \cdots$$

$$= 1 - 0.0156 - 0.0004 - \cdots$$

$$= 0.9840 \text{ aproximadamente}$$

y $\sqrt[4]{15} = 2(0.9840) = 1.97$ hasta dos lugares decimales.

### *EJERCICIO 13-2*

Desarrolle hasta cuatro términos y simplifique.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $(1 - x)^{-1}$ | **2.** $(1 + y)^{1/2}$ | **3.** $(1 + y)^{-1}$ |
| **4.** $(1 + x)^{-2}$ | **5.** $(1 - x)^{-3}$ | **6.** $(1 + y)^{3/2}$ |
| **7.** $(1 - 3x)^{-3/2}$ | **8.** $(1 + 2y)^{2/3}$ | **9.** $(1 + 4x^2)^{-4/3}$ |
| **10.** $(x + y)^{-1}$ | **11.** $(a + 2x)^{-3}$ | **12.** $(3 + y)^{-4}$ |
| **13.** $(2 - x)^{1/4}$ | **14.** $(4 - x)^{-5}$ | **15.** $(3 + y)^{-4/3}$ |

Aproxime hasta el segundo decimal, empleando el número necesario de términos de cada expansión.

| | | |
|---|---|---|
| **16.** $\sqrt{24} = (25 - 1)^{1/2}$ | **17.** $\sqrt[3]{28}$ | **18.** $\sqrt[4]{80}$ |
| **19.** $\sqrt{0.98}$ | **20.** $26^{-1/2}$ | **21.** $33^{-1/5}$ |
| **22.** $(1.01)^{-4}$ | **23.** $(0.99)^{-3}$ | **24.** $(1.03)^{-4}$ |

## 13-3. INDUCCION MATEMATICA

Algunos teoremas matemáticos y fórmulas pueden demostrarse por un proceso de raciocinio llamado inducción matemática. Este método de demostración se basa en el siguiente axioma.

**Axioma 11.** *El axioma de inducción matemática.* Supongamos que $A$ representa al conjunto de enteros positivos tal que:

1. El entero 1 pertenece a $A$.
2. Si $k$ pertenece a $A$, se infiere que $k + 1$ pertenece a $A$.

En estas condiciones se puede afirmar que $A$ consiste en todos los enteros positivos.

Como este axioma lo indica, hay dos partes esenciales en la demostración de un teorema por inducción matemática. El método se explica mejor dando ejemplos ilustrativos.

EJEMPLO 1. Demostremos que la suma de los $n$ primeros enteros positivos impares es $n^2$. Esto es, demostremos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

*Demostración.* La demostración tiene dos partes separadas.

Parte I. Para que la fórmula sea válida debe serlo en particular para el mínimo valor asignable a $n$. El mínimo valor para el cual la fórmula tiene sentido es $n = 1$. Verificar entonces la fórmula para $n = 1$ constituye la primera parte de la demostración. Para ilustrar el significado de la fórmula sustituimos también $n = 2$ y $n = 3$.

Para $n = 1$, $\quad 1 = 1^2$ or $1 = 1$

Para $n = 2$, $\quad 1 + 3 = 2^2$ or $4 = 4$

Para $n = 3$, $\quad 1 + 3 + 5 = 3^2$ or $9 = 9$

Así se ve que la fórmula es válida para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Pero esto no prueba la fórmula para otros valores de $n$, y la verificación de la fórmula para otros valores de $n$ demuestra la fórmula tan sólo para los valores usados. Para completar la demostración procedemos a la siguiente parte.

Parte II. Esta parte de la demostración consiste en demostrar que si la fórmula es válida para un valor $n$, digamos $n = k$, entonces es consecuencia que también vale para $n = k + 1$. Esto es, si $k^2$ es la suma de los $k$ primeros enteros positivos impares, entonces debe demostrarse que $(k + 1)^2$ es la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos impares. Por tanto, sustituyendo $k$ por $n$, *suponemos* que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

7. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

8. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

9. $a+(a+d)+(a+2d)-\cdots+[a+(n-1)d]=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$

10. $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a-ar^n}{-r}$

11. Demuestre que $2^{3n}-1$ es divisible por 7 si $n$ es cualquier entero positivo.

*Demostración.* (a) Cuando $n=1$, la expresión $2^{3n}-1=7$. (b) Supongamos que $2^{3k}-1=7x$, con $x$ un entero positivo. Entonces, multiplicando ambos miembros de esta ecuación por 8, obtenemos

$$\begin{aligned} 2^3\,2^{3k}-8&=56x\\ 2^{3(k+1)}-1&=56x+7\\ &=7(8x+1)\end{aligned}$$

En los siguientes problemas, suponga que $n$ representa a cualquier entero positivo.

12. Demuestre que $2^{2n}-1$ es divisible por 3.
13. Demuestre que $3^n-1$ es divisible por 2.
14. Demuestre que $7^n-1$ es divisible por 6.
15. Demuestre que $3^{2n}-1$ es divisible por 8.
16. Demuestre que $3^{3n}-1$ es divisible por 26.
17. Demuestre que $x^n-y^n$ es divisible por $x-y$, donde $x-y\neq 0$.
Sugestión: $x^{k+1}-y^{k+1}=x^{k+1}-xy^k+xy^k-y^{k+1}$
$=x(x^k-y^k)+y^k(x-y)$
18. Demuestre que $x^{2n+1}+y^{2n+1}$ es divisible por $x+y$, donde $x+y\neq 0$.

## 13-4. DEMOSTRACION DEL TEOREMA BINOMIAL POR INDUCCION MATEMATICA

Aplicamos ahora la inducción matemática para obtener una segunda demostración del teorema del binomio. Puesto que el teorema ha sido verificado para $n=1$ procedemos a la segunda parte de la demostración.

Parte II. Supongamos que la fórmula es válida para $n=k$. Entonces tenemos

$$(a+x)^k=a^k+ka^{k-1}x-\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}x^{r-1}$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots(k-r-2)(k-r+1)}{r!}a^{k-r}x^r+\cdots+kax^{k-1}+x^k \qquad (1)$$

Con el propósito de obtener una expresión para $(a + x)^{k+1}$, multiplicamos ambos miembros de la Ec. (1) por $a + x$. Esto da

$$(a + x)^{k+1} = a^{k+1} + (k + 1)a^k x + \cdots + \frac{(k + 1)(k)(k - 1)\cdots(k - r + 2)}{r!}a^{k-r+1}x^r + \cdots + x^{k+1}$$

El estudiante debería verificar esta multiplicación. Es fácil verificar el primero, segundo y último términos. El término que contiene $a^{k-r+1}x^r$ se obtiene multiplicando el $r$-ésimo término de la expansión en (1) por $x$ y el $(r + 1)$-ésimo término por $a$ y luego añadiendo estos dos productos. Así, el coeficiente de $a^{k-r+1}x^r$ es la suma de los coeficientes del $r$-ésimo término y el $(r + 1)$-ésimo término del miembro derecho de (1). Esto es,

$$\frac{k(k - 1)\cdots(k - r + 2)}{(r - 1)!} + \frac{k(k - 1)\cdots(k - r - 2)(k - r + 1)}{r!}$$

$$= \frac{rk(k - 1)\cdots(k - r + 2) + k(k - 1)\cdots(k - r + 2)(k - r + 1)}{r!}$$

$$= \frac{k(k - 1)\cdots(k - r + 2)[r + (k - r + 1)]}{r!}$$

$$= \frac{(k + 1)(k)(k - 1)\cdots(k - r + 2)}{r!}$$

La expresión que hemos obtenido para $(a + x)^{k+1}$ es exactamente lo que da la fórmula del binomio al sustituir $n = k + 1$. Por tanto, para cualquier $n$ entero positivo tenemos

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n - 1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + \frac{n(n - 1)\cdots(n - r + 2)}{(r - 1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n \quad \blacksquare$$

## *EJERCICIO DE REVISION*

Escriba la expansión de cada binomio y simplifique los términos (Sec. 13-1).

1. $(3a + 2y)^4$
2. $(2m + 3n)^5$
3. $(1 - 2x)^6$
4. $(n^2 - 3m)^6$
5. $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)^6$
6. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$
7. $\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right)^6$

Encuentre el término especificado en cada una de las siguientes potencias. No encuentre los términos precedentes (Sec. 13-1).

8. $(a - x)^8$; 5o. término
9. $(m + 3)^7$; 4o. término
10. $(2x + y)^{10}$; 7o. término
11. $(2x^2 + y^2)^{13}$; 10o. término
12. $(a - \frac{1}{2}b)^{10}$; término medio
13. $(x^2 + y^2)^{14}$; término medio
14. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$; término independiente de $x$
15. $\left(3x + \frac{1}{x^2}\right)^9$; término independiente de $x$.
16. $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{10}$; término que involucra $x^5$

Tome suficientes términos de la expansión binomial para evaluar cada una de las siguientes expresiones hasta el tercer lugar decimal (Sec. 13-1).

17. $(1.02)^8$
18. $(0.98)^9$
19. $(1.01)^8$

Dé la expansión de cada binomio hasta el cuarto término y simplifique los coeficientes (Sec. 13-2).

20. $(1 - y)^{1/2}$
21. $(1 - x)^{-2}$
22. $(1 + y)^{-1/2}$
23. $(1 - 2y)^{2/3}$
24. $(x + y)^{-2}$
25. $(3 - y)^{-4}$
26. $(4 + x)^{-5}$

Aproxime hasta el segundo lugar decimal, empleando el número necesario de términos de cada expansión (Sec. 13-2).

27. $\sqrt{26}$
28. $\sqrt[4]{82}$
29. $24^{-1/2}$
30. $(0.99)^{-4}$
31. $(0.97)^{-5}$

# Capítulo 14

# TEORIA DE LAS ECUACIONES

## 14-1. POLINOMIOS Y ECUACIONES POLINOMIALES

Una expresión de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

donde $n$ es un entero positivo y $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, son cualesquier constantes con $a_0 \neq 0$, es llamado *polinomio*, o *expresión racional entera*, del $n$-ésimo grado en $x$. Denotando el polinomio mediante $f(x)$ y escribiendo $f(x) = 0$, formamos la correspondiente ecuación polinomial. Un valor de $x$ que satisface a la ecuación es llamado una *raíz* o *solución* de la ecuación y también un *cero* del polinomio.

En este capítulo vamos a estudiar algunas de las propiedades de los polinomios con referencia particular a sus ceros o a las raíces de las ecuaciones polinomiales correspondientes. Hemos desarrollado métodos para resolver ecuaciones polinomiales de primero y segundo grados. Encontrar las raíces de las ecuaciones de grados superiores en general es menos sencillo. El problema es, de hecho, demasiado complicado para una investigación completa en esta etapa. Sin embargo, estableceremos ciertos teoremas relacionados con los polinomios y las raíces de las ecuaciones correspondientes.

## 14-2. EL TEOREMA DEL RESIDUO Y EL TEOREMA DEL FACTOR

Si dividimos $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ por $x - 2$, obtenemos el cociente $2x^2 + x + 3$ con 5 como el residuo. Ahora, sustituyendo 2 por $x$ en el dividendo, tenemos

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 + 2 - 1 = 5$$

Así obtenemos el residuo 5 de dos maneras. Esta es una ilustración de un teorema que, como vamos a ver, tiene consecuencias importantes.

Teorema 14-1. El *teorema del residuo.* Si un polinomio $f(x)$ se divide por $x - r$ hasta obtener un residuo libre de literales, el residuo resultante es igual a $f(r)$.

*Demostración.* Sea $Q(x)$ el cociente cuando dividimos $f(x)$ por $x - r$, y designemos con $R$ al residuo. Entonces

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R$$

(dividendo = divisor × cociente + residuo)

Puesto que esto es una identidad, válida para todos los valores de $x$, podemos sustituir $r$ por $x$, y obtener

$$f(r) = (r - r)Q(r) + R$$

$$f(r) = 0 \cdot Q(r) + R$$

$$f(r) = R$$

Esto establece el teorema del residuo. ■

Teorema 14-2. *El teorema del factor y su recíproco.* Si $r$ es una raíz de la ecuación polinomial $f(x) = 0$, entonces $x - r$ es un factor de $f(x)$; y recíprocamente, si $x - r$ es un factor de $f(x)$, entonces $r$ es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

*Demostración.* Por el teorema del residuo, tenemos

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R = (x - r)Q(x) + f(r)$$

Si $r$ es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, entonces $f(r) = 0$. Así pues, podemos presentar a $f(x)$ en la forma factorizada

$$f(x) = (x - r)Q(x)$$

Para demostrar el recíproco del teorema necesitamos simplemente observar que $x - r$ dado como factor, nos permite escribir la identidad

$$f(x) = (x - r)Q(x)$$

que es válida para todos los valores de $x$. Por tanto, reemplazando $x$ por $r$, tenemos

$$f(r) = (r - r)Q(r) = 0 \cdot Q(r) = 0 \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 1. Mostremos por el teorema del factor que $x^3 + x^2 - 7x - 3$ es divisible por $x + 3$.

*Solución.* Para determinar si $x - 3$ es un factor, necesitamos solamente ver si $-3$ es una raíz de la ecuación

$$x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$$

Sustituyendo $-3$ por $x$, obtenemos

$$(-3)^3 + (-3)^2 - 7(-3) - 3 = -27 + 9 + 21 - 3 = 0$$

La ecuación tiene $-3$ como una raíz; así $x + 3$ es un factor de

$$x^3 + x^2 - 7x - 3.$$

EJEMPLO 2. Formemos una ecuación cúbica $f(x) = 0$ cuyas raíces sean 2, $-3$, 1/5.

*Solución.* Por el teorema del factor sabemos que $x - 2$, $x + 3$ y $x - 1/5$ son factores de $f(x)$. Así, escribimos la ecuación

$$(x - 2)(x + 3)(x - \tfrac{1}{5}) = 0$$

Esta ecuación tiene las raíces requeridas. Sin embargo, para evitar coeficientes fraccionarios, reemplazamos $x - 1/5$ por $5x - 1$ y así obtenemos una ecuación equivalente. Esto es,

$$(x - 2)(x + 3)(5x - 1) = 0 \quad \text{o} \quad 5x^3 + 4x^2 - 31x + 6 = 0$$

EJEMPLO 3. Determinemos si $x - y$ y $x + y$ son factores de $x^{2n} - y^{2n}$, donde $n$ es un entero positivo.

*Solución.* Si $y$ y $-y$ son raíces de la ecuación $f(x) = x^{2n} - y^{2n} = 0$, entonces, por el teorema del factor, $x - y$ y $x + y$ son factores de $x^{2n} - y^{2n}$. Vemos de inmediato que

$$f(y) = y^{2n} - y^{2n} = 0 \quad \text{y} \quad f(-y) = (-y)^{2n} - y^{2n} = 0,$$

y en consecuencia $x - y$ y $x + y$ son factores de la expresión dada.

## *EJERCICIO 14-1*

Encuentre el residuo que resulta de efectuar la división indicada. Haga la división completa y también encuentre el residuo usando el teorema del residuo.

1. $(x^2 - 4x + 7) \div (x - 2)$
2. $(3x^2 - 5x - 3) \div (x + 3)$
3. $(x^3 - 4x^2 - 2x + 5) \div (x - 1)$
4. $(3x^3 - 4x^2 - 5x + 3) \div (x + 1)$
5. $(2x^4 + 5x^3 + x - 7) \div (x - 2)$
6. $(x^4 - 5x^2 + 7x - 2) \div (x + 2)$

Por el teorema del factor, determine si la segunda expresión es un factor de la primera.

7. $x^3 - 4x^2 + 3x + 8, x + 1$
8. $2x^3 - 3x^2 + 2x - 8, x - 3$
9. $3x^3 + 5x^2 - 6x + 17, x + 2$
10. $4x^3 - 6x^2 + 2x + 11, x - 1$
11. $x^3 + 2x^2 - 6x - 72, x - 4$
12. $x^3 + 8x^2 + 8x - 32, x + 3$
13. $2x^4 + x^3 + x - \frac{3}{4}, x - \frac{1}{2}$
14. $3x^4 - x^3 - 3x^2 + \frac{1}{3}, x - \frac{1}{3}$
15. $x^4 - 16, x + 2$
16. $x^3 + 27, x - 3$
17. $x^5 - 1, x + 1$
18. $x^5 + 1, x + 1$

19. $x^8 - 1, x + 1$
20. $x^7 - y^7, x + y$
21. $x^9 + y^9, x + y$
22. $x^6 - y^6, x + y$
23. $x^6 - y^6, x + y$
24. $x^n - y^n, x - y$, $n$ un entero positivo
25. $x^n - y^n, x + y$, $n$ un entero positivo par
26. $x^n + y^n, x + y$, $n$ un entero positivo impar

Escriba ecuaciones con coeficientes enteros que tienen como raíces a los números dados, exclusivamente.

27. $1, -2, 3$
28. $-1, 2, 4$
29. $-1\ -2, -3$
30. $\frac{1}{2}, 1, 2$
31. $\frac{1}{3}, -1, 1$
32. $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1$

## 14-3. DIVISION SINTETICA

Una operación ampliamente usada en la determinación de las raíces de un polinomio, es dividir un polinomio $f(x)$ por una expresión lineal de la forma $x - r$. Este tipo de división se puede hacer con rapidez empleando la llamada *división sintética*. El proceso es simplemente una forma abreviada de la división usual. La mejor manera de explicar el método es trabajando en un ejemplo.

EJEMPLO 1. Dividamos $2x^3 + x^2 - 18x + 7$ por $x - 2$.

*Solución.* Primero usamos el método corriente.

$$\begin{array}{rl} 2x^3 + x^2 - 18x + 7 & \mid x - 2 \text{ (DIVISOR)} \\ \underline{2x^3 - 4x^2} & \mid \underline{2x^2 + 5x - 8} \text{ (COCIENTE)} \\ 5x^2 - 18x & \\ \underline{5x^2 - 10x} & \\ -\ 8x + 7 & \\ \underline{-\ 8x + 16} & \\ -\ 9 & \text{(RESIDUO)} \end{array}$$

En los pasos de la división los términos $-18x$ y $7$ fueron reescritos. Dejemos ahora estos términos en la primera línea y escribamos por debajo de ellos los términos que han de ser sustraídos. La división aparece entonces como

$$\begin{array}{rl} 2x^3 + x^2 - 18x + 7 & \mid x - 2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 10x + 16} & \mid \underline{2x^2 + 5x - 8} \\ 5x^2 - 8x - 9 & \end{array}$$

La tercera línea tiene en orden los coeficientes $5$, $-8$ y $-9$. Colocando el primer coeficiente de la primera línea debajo de éstos, tenemos

$$2, 5, -8, -9$$

Estos valores son, en el orden apropiado, los coeficientes del cociente $2x^2 + 5x - 8$ y el residuo $-9$.

tonces $(x - a - bi)$ es un factor de $f(x)$. Mostraremos que $(x - a + bi)$ es también un factor, demostrando que el producto

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

es un factor de $f(x)$. Sea $D(x)$ este producto. Ahora $f(x)$ puede ser dividido por la expresión cuadrática $D(x)$ hasta obtener un residuo de grado inferior a dos. Indicando entonces el cociente por $Q(x)$ y el residuo por $Rx + S$, podemos escribir

$$f(x) = D(x)Q(x) + Rx + S$$

Si sustituimos $a + bi$ por $x$ en esta identidad, obtenemos

$$f(a + bi) = D(a + bi)Q(a + bi) + R(a + bi) + S$$

Pero, por hipótesis, $f(a + bi) = 0$. Y $D(a + bi) = 0$, puesto que $(x - a - bi)$ es un factor de $D(x)$. Así obtenemos

$$0 = 0 \cdot Q(a + bi) + R(a + bi) + S$$

o

$$(Ra + S) + Rbi = 0$$

Un número complejo es igual a cero si, y sólo si, sus componentes reales e imaginarios son cada uno igual a cero. Así debemos tener

$$Ra + S = 0 \quad \text{y} \quad Rb = 0$$

Puesto que $a + bi$ es un número imaginario, $b \neq 0$; y por tanto, $R = 0$. Sustituyendo $R = 0$ en $Ra + S = 0$ obtenemos $S = 0$. Así, el residuo $Rx + S$ es igual a cero, y

$$f(x) = D(x)Q(x) = (x - a - bi)(x - a + bi)Q(x)$$

Entonces $(x - a + bi)$ es un factor de $f(x)$ y, consecuentemente, $a - bi$ es una raíz de $f(x) = 0$. ■

Es fácil ver que al intercambiar $a + bi$ y $a - bi$ en los pasos de la demostración precedente obtenemos el resultado de que $a + bi$ es una raíz de $f(x) = 0$ si $a - bi$ es una raíz. Concluimos, entonces, que una ecuación polinomial con coeficientes reales que tiene una raíz compleja, tiene también como raíz al complejo conjugado de dicha raíz.

Si los coeficientes de una ecuación polinomial $f(x) = 0$ son números racionales, entonces tenemos un teorema similar concerniente a raíces cuadráticas irracionales. Los números $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$, donde $a$ y $b$ son racionales y $\sqrt{b}$ ($b$ positivo) es irracional, son llamados irracionales cuadráticos conjugados.

**Teorema 14-7.** Si el irracional cuadrático $a + \sqrt{b}$ (o $a - \sqrt{b}$) es una raíz de una ecuación polinomial $f(x) = 0$ con coeficientes racionales, entonces el irracional conjugado $a - \sqrt{b}$ (o $a + \sqrt{b}$) es también una raíz.

La demostración de este teorema es muy semejante a la que se da para las raíces complejas conjugadas y, por tanto, se deja al estudiante.

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación $x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 12x - 39 = 0$, si $(2 - 3i)$ es una de las raíces,

*Solución.* Puesto que $(2 - 3i)$ es una raíz, también $(2 + 3i)$ es una raíz. Entonces el producto

$$(x - 2 + 3i)(x - 2 - 3i) = x^2 - 4x + 13$$

es un factor del miembro izquierdo de la ecuación dada. El otro factor, obtenido por división, es $x^2 - 3$. Las raíces de $x^2 - 3 = 0$ son $\pm \sqrt{3}$. Así, la solución de la ecuación dada es

$$x = \pm\sqrt{3}, \quad 2 \pm 3i$$

EJEMPLO 2. Demos una ecuación con coeficientes racionales y de grado mínimo posible si dos de las raíces son $2 - 3\sqrt{5}$ y $4 + i$.

*Solución.* Además de las raíces dadas, $2 - 3\sqrt{5}$ y $4 - i$ también deben ser raíces. Así, la ecuación requerida es

$$(x - 2 + 3\sqrt{5})(x - 2 - 3\sqrt{5})(x - 4 - i)(x - 4 + i) = 0$$

o, multiplicando,

$$x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 260x - 697 = 0$$

## 14-5. COEFICIENTES EN TERMINOS DE LAS RAICES

Si $r_1$, $r_2$ y $r_3$ son las raíces de la ecuación cúbica

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{1}$$

entonces la ecuación puede escribirse en la forma factorizada

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0 \tag{2}$$

Por multiplicación obtenemos

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3 = 0 \tag{3}$$

Los miembros izquierdos de las Ecs. (1) y (3) son idénticos; por lo tanto, podemos igualar los coeficientes de potencias iguales de $x$ y obtener

$$a_1 = -(r_1 + r_2 + r_3)$$

$$a_2 = (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)$$

$$a_3 = -(r_1r_2r_3)$$

En la misma forma se puede mostrar que los coeficientes $a_1$, $a_2$, . . . , $a_n$ de la ecuación

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{4}$$

pueden expresarse como sigue:

$a_1$ = − (*la suma de las raíces*),

$a_2$ = (*la suma de los productos de las raíces tomadas de dos en dos*),

$a_3$ = − (*la suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres*),

.

.

.

$a_n$ = $(-1)^n$ (producto de las raíces).

Si el coeficiente del término del grado máximo es $a_0$ diferente de 1, entonces la ecuación puede ponerse en la forma (4) dividiéndose por $a_0$.

EJEMPLO. Formemos una ecuación cúbica que tiene 2, −3 y 5 como raíces.

*Solución.* Escribamos la ecuación como $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Entonces

$$a_1 = -(2 - 3 + 5) = -(4) = -4$$

$$a_2 = (2)(-3) + (2)(5) + (-3)(5) = -6 + 10 - 15 = -11$$

$$a_3 = -(2)(-3)(5) = 30$$

Así obtenemos la ecuación $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$, que tiene los números dados como raíces.

## *EJERCICIO 14-3*

Encuentre las raíces faltantes en cada ecuación.

1. $x^3 + 4x^2 + x + 4 = 0$, $i$ es una raíz
2. $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0$, $2 + 3i$ es una raíz

3. $x^3 - 8x^2 + 6x - 52 = 0, 5 - i$ es una raíz
4. $3x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0, 1 - \sqrt{2}$ es una raíz
5. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 28x - 56 = 0, \sqrt{7}$ es una raíz
6. $x^4 - 4x^3 + 28x - 49 = 0, \sqrt{7}$ es una raíz
7. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0, 1 + i\sqrt{3}$ es una raíz
8. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0, -2 + \sqrt{3}$ es una raíz
9. $x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 36x + 66 = 0, -3 + i\sqrt{2}$ es una raíz

Encuentre la ecuación de grado mínimo posible con coeficientes enteros que tiene los números dados entre sus raíces.

10. $1 + i, 2$
11. $6 - 3i, 4$
12. $i, 2 - i$
13. $5 - 2i, \sqrt{2}$
14. $3i, 4 + \sqrt{2}$
15. $2 + 4i, 4 - 3i$
16. $\sqrt{7}, 3 - \sqrt{5}$
17. $1 - 2i, 1 + 3i$
18. $1 + \sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}$

Encuentre la suma y el producto de las raíces de cada ecuación.

19. $x^3 - 3x^2 + x - 5 = 0$
20. $x^4 + x^2 - 5x + 1 = 0$
21. $x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = 0$
22. $2x^3 - 5x^2 + 8x + 10 = 0$
23. $x^6 - x^4 + x^2 + 3 = 0$
24. $x^5 + 5x^4 - x - 12 = 0$

Use el método de la Sec. 14-5 para encontrar una ecuación que tiene las raíces dadas.

25. $2, -1, -4$
26. $0, -3, 5$
27. $-2, -1, 3$
28. $1, i, -i$
29. $-1, 0, 1, 2$
30. $1, 1 + i, 1 - i$

31. Demuestre el Teorema 14-7.
32. Demuestre que una ecuación cúbica con coeficientes reales tiene tres raíces reales, o una raíz real y una pareja de raíces complejas conjugadas.
33. Demuestre que una ecuación de cuarto grado con coeficientes reales tiene cuatro raíces reales, o cuatro raíces imaginarias, o dos raíces reales y dos imaginarias.
34. Demuestre que una ecuación polinomial de quinto grado tiene al menos una raíz real, y enuncie las posibilidades que hay para las raíces restantes.
35. Diga qué posibilidades hay para la distribución de las raíces reales e imaginarias de una ecuación polinomial de sexto grado con coeficientes reales.

## 14-6. RAICES RACIONALES

Un número racional que es la raíz de una ecuación, es llamado una *raíz racional* de esa ecuación. Vamos a considerar un método sumamente sencillo para la determinación de las raíces racionales, siempre que las haya, de una ecuación polinomial con coeficientes racionales.

**Teorema 14-8.** Si un número racional $b/c$ en términos mínimos es una raíz de la ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todos enteros con $a_0 \neq 0$, entonces $b$ es un factor de $a_n$ y $c$ es un factor de $a_0$.

*Demostración.* Suponiendo que $b/c$ es una raíz, tenemos

$$a_0\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_1\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{b}{c}\right) + a_n = 0 \qquad (1)$$

Multiplicando esta ecuación por $c^n/b$ y pasando el último sumando al miembro derecho, obtenemos

$$a_0b^{n-1} + a_1b^{n-2}c + a_2b^{n-3}c^2 + \cdots + a_{n-1}c^{n-1} = -\frac{a_nc^n}{b} \qquad (2)$$

El miembro izquierdo de la Ec. (2), es una suma de términos cada uno de los cuales es un producto de enteros, y tiene, por tanto, un valor entero. Así, el miembro derecho

$$-\frac{a_nc^n}{b}$$

también debe ser un entero. Por hipótesis $b$ y $c$ no tienen factor entero en común, aparte de $\pm 1$; se infiere entonces que $a_n$ es divisible por $b$.

Ahora, volviendo a la Ec. (1), multiplicamos por $c^{n-1}$. Pasamos el primer término al miembro derecho y obtenemos

$$a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2}c + a_3b^{n-3}c^2 + \cdots + a_{n-1}bc^{n-2} + a_nc^{n-1} = -\frac{a_0b^n}{c}$$

El miembro izquierdo de esta ecuación tiene un valor entero, lo cual significa que la fracción a la derecha puede expresarse como un entero. Puesto que $b$ y $c$ no tienen factor común entero, aparte de $\pm 1$, $a_0$ es divisible por $c$. ■

Para el caso en el cual $a_0 = 1$, la raíz racional $b/c$ es un entero. Esto es cierto porque $c$, al ser un factor de $a_0$, sería igual a 1 o $-1$. Así tenemos el siguiente corolario.

**Corolario.** *Cualquier raíz racional de la ecuación*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

*donde los coeficientes son enteros, es un entero y un factor de* $a_n$.

EJEMPLO 1. Encontremos todas las raíces racionales de

$$f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x - 12 = 0$$

*Solución.* Las raíces racionales, si las hay, deben ser factores de $-12$; y las posibilidades son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 4, \quad \pm 6, \quad \pm 12$$

Ensayando a 1 por división sintética, encontramos $f(1) = 0$.

$$\begin{array}{r|l} 1+1+4+\ 6-12 & 1 \\ \quad 1+2+\ 6+12 & \\ \hline 1+2+6+12+\ 0 & \end{array}$$

Entonces $f(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + 6x + 12)$. Raíces adicionales de $f(x) = 0$ pueden encontrarse fácilmente a partir de la ecuación

$$Q_1(x) = x^3 + 2x^2 + 6x - 12 = 0$$

$Q_1(x) = 0$ es llamada *primera ecuación reducida.* Esta ecuación no tiene raíces positivas, ya que un valor positivo de $x$ hace a todos los términos de la izquierda positivos y la suma de ellos no podrá, desde luego, ser igual a cero. Ensayando valores negativos y comenzando con $-1$, encontramos $Q_1(-1) = 7$. Pasando a $-2$, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} 1+2+6+12 & -2 \\ \quad -2+0-12 & \\ \hline 1+0+6+\ 0 & \end{array}$$

Así, $Q_1(-2) = 0$ y, consecuentemente,

$$Q_1(x) = (x + 2)(x^2 + 6)$$

La ecuación $Q_2(x) = x^2 + 6 = 0$ es llamada la *segunda ecuación reducida.* Sus raíces son $\pm\sqrt{-6}$, que no son reales. Concluimos entonces, que $-2$ y $1$ son las raíces racionales de la ecuación dada.

EJEMPLO 2. Encontremos las raíces racionales, si las hay, de la ecuación

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 9 = 0$$

*Solución.* Los signos de los coeficientes se alternan aquí y, en consecuencia, todos los términos serán positivos para cualquier valor negativo de $x$. Así, cualquier raíz real de la ecuación deberá ser positiva. Las posibilidades para raíces racionales, entonces, son

$$\tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{3}{2},\ 3,\ \tfrac{9}{2},\ 9$$

Encontramos $f(\frac{1}{2}) = -19/4$ y $f(1) = 5$. Probando $\frac{3}{2}$, tenemos

$$\begin{array}{r|l} 2-3+10-13+\ 9 & \frac{3}{2} \\ \quad +3+\ 0+15+\ 3 & \\ \hline 2+0+10+\ 2+12 & \end{array}$$

Vemos que $\frac{3}{2}$ no es una raíz. Más aún, vemos que probando un número mayor que $\frac{3}{2}$ obtendremos un número mayor que 12 en la última posición de la tercera línea. Así, pues, no necesitamos probar los valores, 3, $\frac{9}{2}$ y 9. La ecuación dada no tiene raíz racional.

Como se ilustra en este ejemplo, en algunos casos el siguiente teorema puede ser aplicado con ventaja en la prueba de las raíces racionales supuestas.

**Teorema 14-9.** Si en la división sintética de un polinomio $f(x)$ por $x - r$, donde $r$ es positivo, cada término de la tercera línea es positivo (algunos pueden ser nulos), entonces $r$ es una cota superior para las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$. Si $r$ es negativo y los términos de la tercera línea son alternativamente positivo y negativo, entonces $r$ es una cota inferior para las raíces.

La verdad de este teorema puede observarse inmediatamente. Si un número positivo $r$ en el proceso de división produce términos positivos en el tercer renglón, un número mayor que $r$ incrementará todos los términos del renglón a partir del primero. Entonces el último término del renglón no podrá ser cero. En consecuencia, un valor mayor que $r$ no es raíz de la ecuación.

La segunda parte del teorema puede establecerse mediante un razonamiento muy similar.

EJEMPLO 3. Encontremos cotas superior e inferior para las raíces de la ecuación.

$$2x^3 - 5x^2 - 7x + 4 = 0$$

*Solución.* Mostramos las pruebas para los casos $r = 3$ y $r = 4$

$$\begin{array}{r|l} 2 - 5 - 7 + 4 & 3 \\ \quad + 6 + 3 - 12 & \\ \hline 2 + 1 - 4 - 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 - 5 - 7 + 4 & 4 \\ \quad + 8 + 12 + 20 & \\ \hline 2 + 3 + 5 + 24 & \end{array}$$

Estas pruebas demuestran que la mínima cota entera superior, según la determina el teorema, es 4.

Intentamos ahora enteros negativos, empezando con $-1$

$$\begin{array}{r|l} 2 - 5 - 7 + 4 & -1 \\ \quad - 2 + 7 + 0 & \\ \hline 2 - 7 + 0 + 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 - 5 - 7 + 4 & -2 \\ \quad - 4 + 18 - 22 & \\ \hline 2 - 9 + 11 - 18 & \end{array}$$

Puesto que con $-2$ los términos del tercer renglón alternan en signo, este número es una cota inferior. Por tanto, todas las raíces reales de la ecuación dada están entre $-2$ y 4.

## *EJERCICIO 14-4*

Encuentre todas las raíces racionales, si las hay, de cada ecuación. Resolver completamente si la última ecuación reducida es cuadrática.

1. $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$
2. $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$
3. $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$
4. $3x^3 - x^2 + 27x - 9 = 0$

**5.** $4x^3 - x^2 + 16x + 4 = 0$
**6.** $8x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0$
**7.** $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0$
**8.** $2x^3 - 7x^2 + 16x - 15 = 0$
**9.** $3x^3 - 8x^2 + 19x + 10 = 0$
**10.** $x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2 = 0$
**11.** $x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$
**12.** $x^4 - 8x^2 - 5x + 6 = 0$
**13.** $6x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0$
**14.** $6x^4 + 5x^3 + 5x - 6 = 0$
**15.** $2x^4 - 13x^3 + 30x^2 - 28x + 8 = 0$
**16.** $2x^4 + 13x^3 + 36x^2 - 70x + 75 = 0$
**17.** $3x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 9x - 2 = 0$
**18.** $12x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1 = 0$
**19.** $x^5 - 9x^4 + 31x^3 - 51x^2 + 40x - 12 = 0$
**20.** $2x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 28x^2 + 21x + 9 = 0$
**21.** $2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 9 = 0$
**22.** $x^5 - 20x^4 + 70x^3 - 100x^2 + 65x - 16 = 0$

Factorice los siguientes polinomios.

**23.** $6x^3 - 5x^2 - 7x + 4$
**24.** $4x^3 - 4x^2 - 3x - 10$
**25.** $2x^3 - 7x^2 + 18x + 11$
**26.** $5x^4 - 2x^3 - 2x$
**27.** $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$
**28.** $x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 20$
**29.** $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$
**30.** $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$

## 14-7. LA GRAFICA DE UNA FUNCION POLINOMIAL

En la Sec. 5-3 introdujimos las gráficas de funciones y relaciones; en la Sec. 8-7 construimos las gráficas de funciones cuadráticas o funciones polinomiales de segundo grado. De las gráficas de las funciones cuadráticas estimamos los ceros reales de las funciones, o sea, las raíces de las ecuaciones cuadráticas correspondientes. El método gráfico puede emplearse para obtener las raíces reales aproximadamente, racionales e irracionales, de una ecuación polinomial de grado mayor que el segundo. Calcular valores de la función en el caso de una ecuación de mayor grado puede resultar tedioso, pero el trabajo se facilita por el uso de la división sintética. Aquí, como anteriormente, vamos a suponer válido el siguiente teorema.

**Teorema 14-10.** Si $f(x)$ denota un polinomio con coeficientes reales y si $a$ y $b$ son números reales tal que $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real entre $a$ y $b$.

Interpretado geométricamente, este teorema significa que la gráfica de $y = f(x)$ cruza al eje de las $x$ al menos una vez entre dos de sus puntos que están en lados opuestos del eje.

EJEMPLO. Dé una estimación válida hasta el primer decimal, de las raíces de la ecuación

$$x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$$

*Solución.* Para trazar la gráfica de la función definida por $y = x^3 - 4x^2 + x + 3$, preparamos la siguiente tabla. Los valores

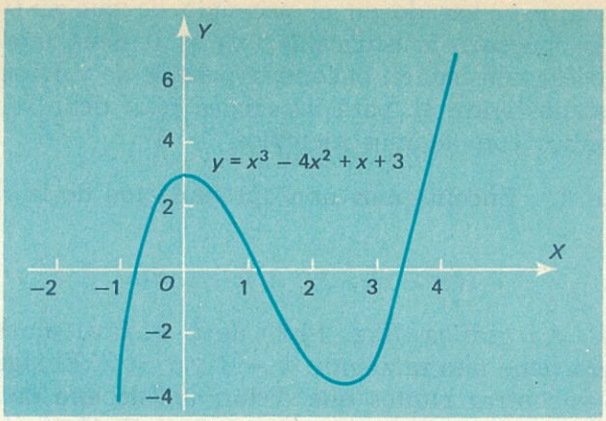



*Figura 14-1*

funcionales deberán verificarse por división sintética. Cuando $x = 3.5$, por ejemplo, tenemos

$$\begin{array}{r|l} 1 - 4.0 + 1.00 + 3.000 & 3.5 \\ \quad + 3.5 - 1.75 - 2.625 & \\ \hline 1 - 0.5 - 0.75 + 0.375 & \end{array}$$

| $x$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $1.5$ | $2$ | $3$ | $3.5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $1.4$ | $3$ | $-1.1$ | $-3$ | $-3$ | $0.4$ |

A partir de la gráfica (Fig. 14-1), estimamos los ceros de la función, o raíces de la ecuación dada en $-0.7$, $1.2$ y $3.5$.

### *EJERCICIO 14-5*

**Resuelva graficando para las raíces reales. Estime las raíces hasta el primer decimal.**

**1.** $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$
**2.** $x^3 - x^2 - 5x - 6 = 0$
**3.** $x^3 - 3x + 4 = 0$
**4.** $x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0$
**5.** $x^3 - 7x - 5 = 0$
**6.** $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$
**7.** $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
**8.** $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
**9.** $x^4 - 3x + 5 = 0$
**10.** $x^4 + 4x^3 - 16x + 5 = 0$

## 14-8. UN METODO PARA APROXIMAR RAICES

Hay muchos procedimientos para encontrar las raíces irracionales de una ecuación polinomial con cualquier grado deseado de exactitud. Vamos a considerar un método que es considerado como la solución por *agrandamientos sucesivos*. Este método, como en la

sección previa, está basado en el principio de que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz entre $a$ y $b$. El proceso consiste en encontrar parejas de valores de $x$ cada vez más cercanos entre sí, para los cuales $f(x)$ tiene signos opuestos. Ilustraremos con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Encontremos una aproximación de la raíz real de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

*Solución.* La gráfica (Fig. 14-2) de $y = f(x)$ muestra que la ecuación dada tiene una raíz entre $x = 1$ y $x = 2$. El siguiente paso consiste en encontrar puntos que distan un décimo de unidad de longitud entre los cuales la curva cruza al eje horizontal. Calculando, encontramos $f(1.6) = -0.424$. En seguida tratamos $x = 1.7$ y $x = 1.8$:

$$\begin{array}{rl} 1 - 2.0 + 1.00 - 1.000 & \vert\, 1.7 \\ \quad 1.7 - 0.51 + 0.833 & \\ \hline 1 - 0.3 + 0.49 - 0.167 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1 - 2.0 + 1.00 - 1.000 & \vert\, 1.8 \\ \quad 1.8 - 0.36 + 1.152 & \\ \hline 1 - 0.2 + 0.64 + 0.152 & \end{array}$$

Vemos que $f(1.7) = -0.167$ y $f(1.8) = 0.152$. Por tanto, los puntos $(1.7, -0.167)$ y $(1.8, 0.152)$ están sobre la gráfica de $y = f(x)$, uno por debajo del eje horizontal y otro por arriba. En consecuencia, la raíz deseada está entre 1.7 y 1.8.

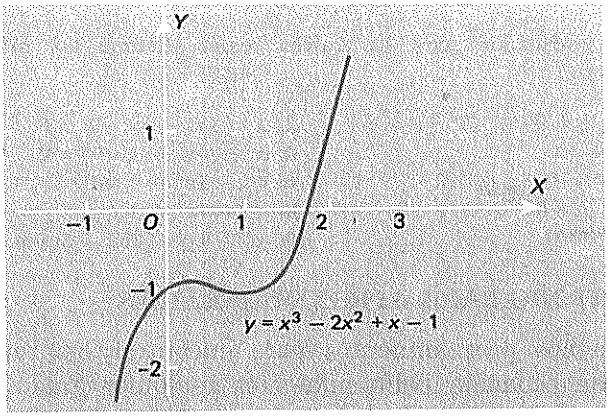



*Figura 14-2*

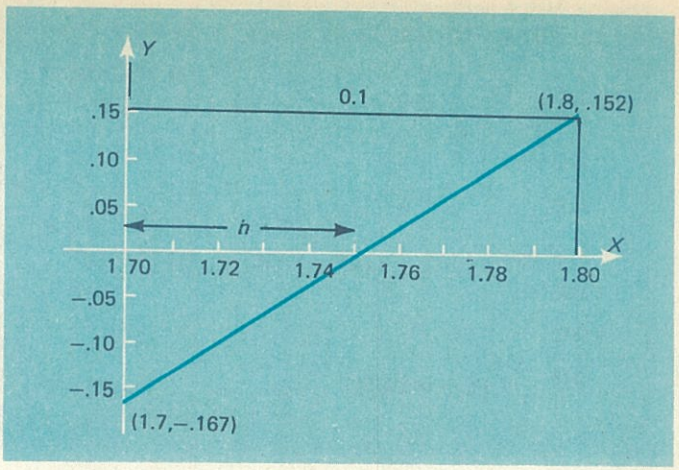



*Figura 14-3*

Localizamos después la raíz entre centésimos de unidad consecutivos. Para este propósito trazamos los puntos de la gráfica para los cuales $x = 1.7$ y $x = 1.8$ agrandando la escala (Fig. 14.3). El segmento rectilíneo que une estos puntos cruza el eje de las $x$ cerca de $x = 1.75$, y la gráfica es probable que cruce al eje de las $x$ en un punto muy cercano. Por división sintética, como se muestra aquí, encontramos $f(1.75) = -0.01526$ y $f(1.76) = 0.016576$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2.00 & +1.0000 & -1.000000 & 1.75 \\ & 1.75 & -0.4375 & +0.984375 & \\ \hline 1 & -0.25 & +0.5625 & -0.015625 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2.000 & +1.0000 & -1.000000 & 1.76 \\ & 1.76 & -0.4224 & +1.016576 & \\ \hline 1 & -0.24 & +0.5776 & +0.016576 & \end{array}$$

Así, vemos que la raíz está entre 1.75 y 1.76. Pero no sabemos a esta altura cuál de estos valores es la mejor aproximación. Podríamos continuar el procedimiento localizando la raíz entre centésimos de unidal consecutivos. Los cálculos, por supuesto, se volverían muy tediosos. Es fácil, sin embargo, calcular la raíz hasta un dígito más. La Fig. 14-4 muestra los puntos en la gráfica para los cuales $x = 1.75$ y $x = 1.76$. La línea que une estos puntos cruza el eje de las $x$ hacia $x = 1.756$ Por tanto, este valor es aproximadamente igual a la raíz de la ecuación dada.

En este ejemplo usamos la Fig. 14-3 para calcular el tercer dígito de la raíz deseada, y la Fig. 14-4 para calcular el cuarto dígito.

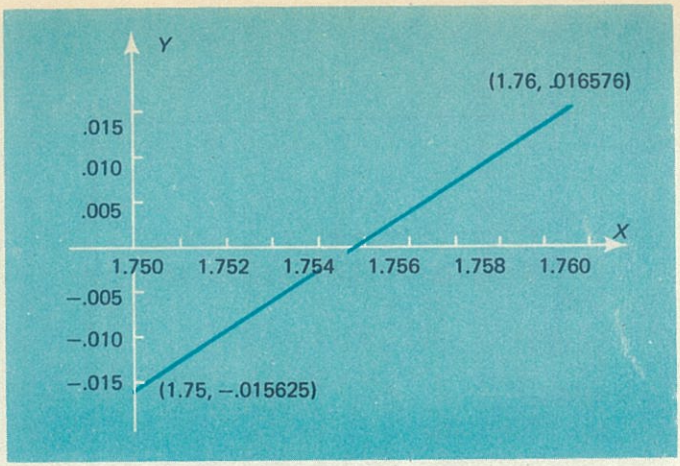



*Figura 14-4*

Podríamos, sin embargo, hacer estas estimaciones algebraicamente. Así, por la semejanza de los triángulos en la Fig. 14-3, tenemos la proporción

$$\frac{h}{0.1} = \frac{0.167}{0.167 + 0.152}$$

que da $h = 0.05$, aproximadamente, y por esta razón $x = 1.75$ es una aproximación a la raíz. Notamos que esta proporción, obtenida sin el uso de una figura, puede ser empleada en lugar de una figura cuidadosamente construida.

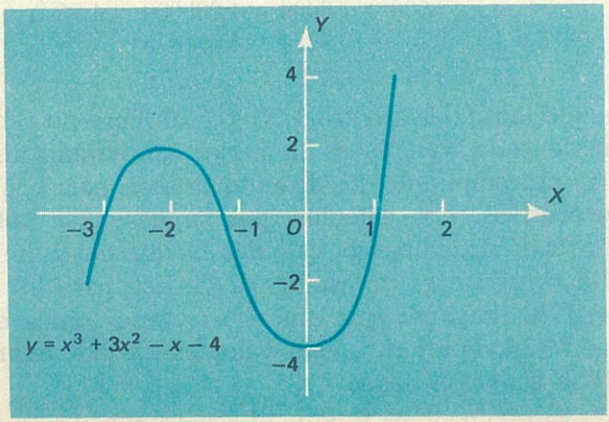



*Figura 14-5*

EJEMPLO 2. Encuentre, hasta el segundo decimal, cada una de las raíces reales de

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 4 = 0$$

*Solución.* Un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$ puede hacerse trazando algunos puntos que correspondan a valores enteros de $x$. La gráfica (Fig. 14-5) muestra que hay una raíz entre $-3$ y $-2$, otra entre $-2$ y $-1$, y una tercera raíz entre 1 y 2. La exactitud deseada en las aproximaciones para estas raíces puede obtenerse considerando cada una por separado. Mostramos los cálculos necesarios para la menor de las tres raíces.

$$\begin{array}{rr|l} 1 + 3.0 - 1.00 - 4.000 & & -2.9 \\ \quad -2.9 - 0.29 + 3.741 & & \\ \hline 1 + 0.1 - 1.29 - 0.259 & & \\ \\ 1 + 3.0 - 1.00 - 4.000 & & -2.8 \\ \quad -2.8 - 0.56 + 4.368 & & \\ \hline 1 + 0.2 - 1.56 + 0.368 & & \end{array}$$

La raíz está entre $x = -2.9$ y $x = -2.8$. La Fig. 14-6 muestra los puntos de la gráfica que corresponden a estos valores de $x$. La línea del segmento que une los puntos cruza el eje de las $x$ cerca de $x = -2.86$. No estamos seguros, sin embargo, que 6 sea el mejor dígito para el segundo lugar decimal. Pero, calculando, encontramos $f(-2.86) = 0.005144$ y $f(-2.85) = -0.068375$. Estos resultados revelan que la raíz está entre $x = -2.85$ y $x = -2.86$, estando la raíz seguramente más cerca de 2.86.

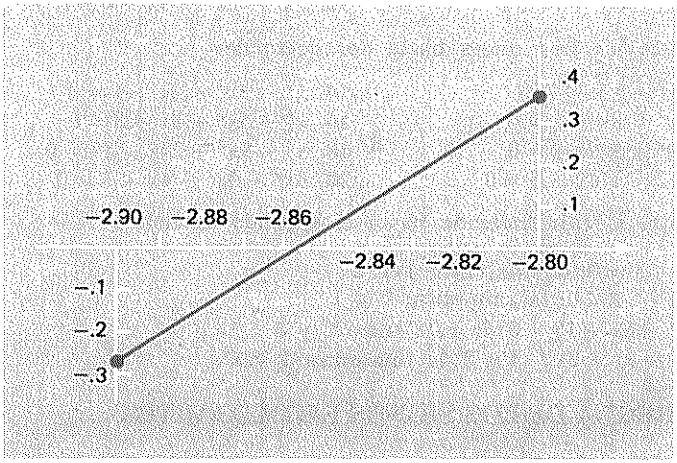



*Figura 14-6*

Las otras dos raíces hasta dos decimales, que el estudiante debe ratificar, son $x = -1.25$ y $x = 1.12$.

Ilustrando con la ecuación del ejemplo precedente, describimos un procedimiento alterno para aproximar raíces negativas. Si reemplazamos $x$ por $-x$ en $x^3 + 3x^2 - x - 4 = 0$, obtenemos

$$-x^3 + 3x^2 + x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x^3 - 3x^2 - x + 4 = 0$$

Las raíces de esta nueva ecuación son los negativos de las raíces de la ecuación original. Por tanto, las aproximaciones a las raíces negativas de la ecuación original pueden encontrarse cambiando los signos de las raíces positivas correspondientes a la nueva ecuación.

En los dos ejemplos hemos encontrado aproximaciones a las raíces reales de las ecuaciones cúbicas. El procedimiento, por supuesto, se puede aplicar a ecuaciones de grados superiores. Además, pueden obtenerse tantos dígitos de una raíz como se deseen. Es evidente, sin embargo, que los cálculos crecen con el grado de la ecuación y con la exactitud requerida en el resultado.

### *EJERCICIO 14-6*

Encuentre hasta dos decimales la raíz real de cada una de las siguientes ecuaciones.

**1.** $x^3 + 3x - 8 = 0$
**2.** $x^3 + x - 14 = 0$
**3.** $x^3 - x^2 - 2 = 0$
**4.** $x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$
**5.** $x^3 + 3x^2 + 3x - 27 = 0$
**6.** $x^3 + 2x - 5 = 0$
**7.** $x^3 + 3x^2 + 5x - 2 = 0$
**8.** $x^3 - 2x^2 - 8 = 0$
**9.** $x^3 + 3x^2 + 3x - 8 = 0$
**10.** $2x^3 + 6x^2 + 6x - 3 = 0$
**11.** $3x^3 + 4x^2 - x - 14 = 0$
**12.** $2x^3 - 3x^2 - 3x - 6 = 0$

Encuentre las tres raíces hasta dos decimales.

**13.** $x^3 - 3x^2 - x + 4 = 0$
**14.** $x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$
**15.** $x^3 - 6x^2 + 8x + 1 = 0$
**16.** $x^3 - 5x^2 + 3x + 8 = 0$
**17.** $x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$
**18.** $x^3 - 9x^2 + 24x - 17 = 0$
**19.** $4x^3 - 12x^2 + 4x + 5 = 0$
**20.** $3x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

Encuentre la raíz indicada hasta el segundo decimal.

**21.** $x^4 - x - 3 = 0$; la raíz entre 1 y 2
**22.** $x^4 + 2x^3 - 2 = 0$; la raíz entre 0 y 1
**23.** $x^4 + x^3 - 6x - 15 = 0$; la raíz entre 2 y 3
**24.** $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 4 = 0$; la raíz entre 1 y 2

## 14-9. LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Un polinomio $f(x)$ cuyos términos están escritos en el orden de las potencias descendentes de $x$ se dice que tiene una variación de

signo si dos términos consecutivos tienen signos opuestos. Se deben ignorar las potencias de $x$ que no aparezcan (un coeficiente cero no se escribe) en esta definición.

Ilustración: El polinomio $2x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 - 2$ tiene tres variaciones de signo. Hay una variación de $2x^5$ a $-x^4$, otra de $-3x^3$ a $+x^2$, y una tercera de $+x^2$ a $-2$.

Las variaciones de signo nos dan cierta información al respecto de las raíces de la ecuación polinomial. En conexión con esto enunciamos un teorema que puede ser útil. A causa de la dificultad, no se da la demostración aquí.

**Teorema 14-11.** *Regla de los signos de Descartes.* El número de raíces positivas de una ecuación polinomial $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ o es menor que ese número y difiere de él en un entero par. El número de raíces negativas de $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$ o es menor que este número y difiere de él en un entero par.

Aunque se omite la demostración, aplicaremos este teorema a ciertas ecuaciones. De acuerdo con la regla, una variación de signos significa que hay exactamente una raíz positiva. Si hay más de una variación la regla de Descartes no nos da una información definitiva. Así, por ejemplo, cuatro variaciones revelan que hay cuatro raíces positivas, o dos raíces positivas, o ninguna raíz positiva.

EJEMPLO 1. Aplique la regla de los signos de Descartes a la ecuación

$$x^3 + 7x^2 + 8x - 17 = 0.$$

*Solución.* El miembro izquierdo $f(x)$ tiene una variación de signo. Por tanto la ecuación tiene exactamente una raíz positiva. Para investigar las raíces negativas, reemplazamos $x$ por $-x$ y tenemos

$$f(-x) = -x^3 + 7x^2 - 8x - 17.$$

Aquí hay dos variaciones de signo. De acuerdo con la regla, la ecuación tiene exactamente dos raíces negativas o ninguna. Concluimos, por tanto, que la ecuación original tiene una raíz positiva y que las otras dos son ambas negativas o ambas imaginarias. Es decir, que las posibilidades son: (a) una raíz positiva y dos negativas; o (b) una raíz positiva y dos imaginarias.

EJEMPLO. 2. ¿Cuál es la información que se puede obtener con la ayuda de la regla de Descartes para la ecuación

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 5 = 0.$$

*Solución.* No hay variación de signo en el miembro izquierdo, y en consecuencia la ecuación no tiene raíz positiva. Tenemos $f(-x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 5$, que contiene cuatro variaciones de signo. Así, por la regla, existen las posibilidades siguientes: (a) todas las raíces son negativas; (b) dos raíces son negativas y dos imaginarias; o (c) todas las raíces son imaginarias.

## *EJERCICIO 14-7*

Aplique la regla de los signos de Descartes a cada ecuación. En los casos en que la regla no permita dar una información exacta enuncie usted las diversas posibilidades en cuanto a los tipos de raíces.

**1.** $2x^3 + 5x - 1 = 0$
**2.** $x^3 + 3x + 3 = 0$
**3.** $3x^3 + 3x^2 + 4 = 0$
**4.** $x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = 0$
**5.** $3x^3 - x^2 + x - 4 = 0$
**6.** $5x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
**7.** $x^4 + x^3 - 1 = 0$
**8.** $x^4 + x^3 + x^2 + x - 7 = 0$
**9.** $x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 4 = 0$
**10.** $x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 8 = 0$
**11.** $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 5 = 0$

# Capítulo 15

# NUMEROS COMPLEJOS

## 15-1. EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

En la Sec. 7-7 dimos una breve introducción a los números complejos, y en este capítulo continuamos el tratamiento de este sistema de números. Aunque cualquiera de las dos notaciones acostumbradas para un número complejo puede usarse en la continuación de su estudio, vamos a utilizar la forma $a + bi$.* Usando esta notación, empezamos dando algunas definiciones.

**Definición 15-1.** Un número de la forma $a + bi$, con $a$ y $b$ constantes reales e $i = \sqrt{-1}$, es llamado un *número complejo*. El número $a$ es llamado la *componente real* y $b$ es llamado la *componente imaginaria*.

**Definición 15-2.** La suma, diferencia, producto y cociente de dos números complejos son definidos por las siguientes ecuaciones.

$$\text{Suma: } (a + bi) + (c + d)i = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Diferencia: } (a + bi) - (c + d)i = (a - c) + (b - d)i$$

$$\text{Producto: } (a + bi)(c + d)i = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$\text{Cociente: } \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

**Definición 15-3.** Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

**Definición 15-4.** Los números $a + bi$ y $a - bi$ son llamados *números complejos conjugados*. Cada uno es conjugado del otro.

* El estudiante debe revisar la Sec. 7-7 en este punto.

El sistema de números complejos constituye un campo. Esta propiedad de los números complejos se deduce de las Definiciones 15-1 y 15-2, y de la suposición que los números reales obedecen a los axiomas de campo (Sec. 2-2). En relación con esto podemos obtener los siguientes teoremas. El estudiante podrá encontrar las demostraciones faltantes.

**Teorema 15-1.** El número $1 + 0 \cdot i$ es una identidad multiplicativa única dentro del sistema de los números complejos $a + bi$.

*Demostración.* Sea $c + di$ un número tal que

$$(a + bi)(c + di) = a + bi$$

Multiplicando y aplicando la Definición 15-3, tenemos

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = a + bi$$

y

$$ac - bd = a$$

$$ad + bc = b$$

La solución de este sistema de ecuaciones lineales en $c$ y $d$ es $c = 1$, $d = 0$. Puesto que no hay otra solución de las ecuaciones, concluimos que $1 + 0 \cdot i$ o $1$ es el elemento de identidad único para la multiplicación. ■

**Teorema 15-2.** Un número complejo $a + bi$, con $a$ y $b$ ambos no nulos, tiene un inverso multiplicativo único.

*Demostración.* Sea $c + di$ un número tal que

$$(a + bi)(c + di) = 1$$

Entonces

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 1$$

y

$$ac - bd = 1$$

$$ad + bc = 0$$

La única solución de este sistema de ecuaciones lineales en $c$ y $d$ es

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Por tanto, el inverso multiplicativo de $a + bi$ es el número complejo

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \quad \text{or} \quad \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$ ■

**Teorema 15-3.** La ley asociativa para la multiplicación es válida para los números complejos. Esto es,

$$[(a + bi)(c + di)](e + fi) = (a + bi)[(c + di)(e + fi)]$$

*Demostración.* Empleando las leyes de la cerradura, conmutativa y asociativa para la adición y multiplicación de números reales (Sec. 2-2) reducimos el miembro izquierdo de esta ecuación a la forma del miembro derecho. Todos los pasos deben seguirse.

$$\begin{aligned}
&[(a + bi)(c + di)](e + fi) \\
&\quad = [(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) \\
&\quad = (ac - bd)e - (ad + bc)f + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i \\
&\quad = a(ce - df) - b(cf + de) + [a(cf + de)i + b(ce - df)i] \\
&\quad = (a + bi)[(c + di)(e + fi)] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 15-4.** Los números complejos obedecen a las leyes de cerradura y de conmutatividad para la adición y la multiplicación.

**Teorema 15-5.** Los números complejos obedecen a la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Esto es,

$$(a + bi)[(c + di) + (e + fi)] = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e - fi)$$

Refiriéndose a la Definición 15-2, vemos que la suma, la diferencia y el producto de dos números complejos se obtienen llevando a cabo las operaciones como si $i$ fuese un número real y, para el producto, reemplazando $i^2$ por $-1$, Vemos también que el cociente de dos números complejos puede obtenerse multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor. Así,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Hemos visto que la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ es vital en la construcción del sistema de números complejos. Adjuntando esta unidad al sistema de números reales, tenemos los elementos para pasar a un conjunto de números ampliado que contiene al conjunto de números reales como un subconjunto propio. Las potencias enteras de $i$ nos dan propiedades interesantes de esta unidad. Por definición, $i^2 = -1$ y, consecuentemente, vemos que

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

puesto que $i^4 = 1$, se concluye que $i$ con un exponente que es un múltiplo entero de 4 es también igual a 1. Así descubrimos que las

potencias enteras de $i$ son iguales a cualquiera de los números $i$, $-1$, $-i$, $1$ y ningún otro. Así, como ejemplos,

$$i^{13} = i^{12} \cdot i = i$$

$$i^{-6} = i^{-6} \cdot i^8 = i^2 = -1$$

EJEMPLO 1. Encontremos el producto de $\sqrt{-3}$ y $\sqrt{-5}$.

*Solución.* Primero expresamos cada número en la forma $i$ veces un número real y después multiplicamos. Así,

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = i\sqrt{3} \cdot i\sqrt{5} = i^2\sqrt{15} = -\sqrt{15}$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que la ley para multiplicar dos radicales del mismo orden que involucran números reales no debe aplicarse a números imaginarios. Así, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$; pero $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$ no es igual a $\sqrt{15}$. Un error en este tipo de multiplicación es menos probable si cada factor se expresa como el producto de $i$ y un número real.

EJEMPLO 2. Si $3x - 5 + (4x + 3)i = y - 4 + (3x + y)i$, encontrar los valores de $x$ y $y$.

*Solución.* Por la Definición 15-3, las componentes reales de los números de la ecuación deben igualarse y las componentes imaginarias también. Por tanto, tenemos el sistema de ecuaciones

$$3x - 5 = y - 4$$

$$4x + 3 = 3x + y$$

La solución de estas ecuaciones es $x = 2$ y $y = 5$.

EJEMPLO 3. Encontrar el cociente de $2 + 3i$ dividido por $4 - 5i$.

*Solución.* Multiplicamos el numerador y denominador por el conjugado del denominador. Así, recordando $i^2 = -1$, tenemos

$$\frac{2 + 3i}{4 - 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)}$$

$$= \frac{8 + 10i + 12i + 15i^2}{16 - 25i^2}$$

$$= \frac{-7 + 22i}{41}$$

## 15.2. REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Los números complejos se representan gráficamente como puntos en el plano de un sistema rectangular de coordenadas. Un número de la forma $a + bi$ se representa mediante un punto cuyas coordenadas son $(a, b)$. Así, cualquier número complejo determina un punto en el plano. Recíprocamente, cualquier punto del plano

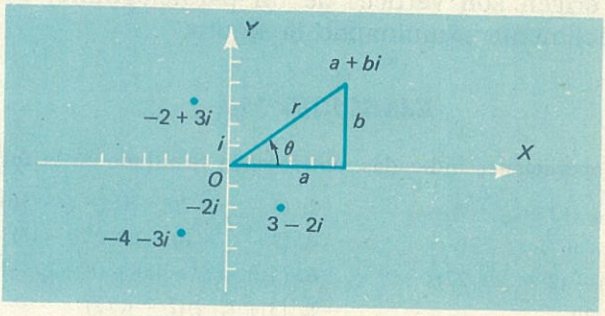



*Figura 15-1*

determina un número complejo. Los puntos sobre los ejes corresponden a números complejos especiales. Puntos en el eje $x$ representan números reales puesto que las coordenadas de estos puntos son nulas. De manera semejante, los puntos en el eje de las $y$ tienen abscisa igual a cero y, por tanto, corresponden a números puramente imaginarios. Así, el punto $(a, 0)$ corresponde al número real $a = a + 0 \cdot i$, y el punto $(0, b)$ corresponde al número puramente imaginario $bi = 0 + bi$.

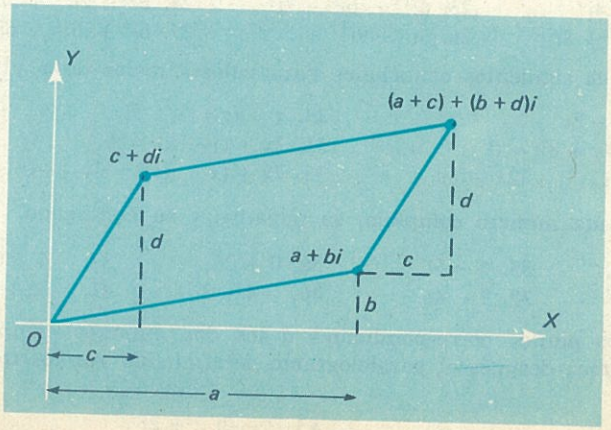



*Figura 15-2*

Cuando se usa un plano de coordenadas rectangulares para representar números complejos, el eje $x$ es llamado el *eje real,* el eje $y$ es llamado el *eje puramente imaginario,* y el plano es llamado el *plano complejo.*

En la Fig. 15-1 se indica la correspondencia entre algunos números complejos y los puntos asociados.

Los puntos que corresponden a los números $a + bi$ $c + di$, y su suma $(a + c) + (b + d)i$ están marcados en la Fig. 15-2. Estos puntos y el origen son vértices de un paralelogramo, como puede verificarse fácilmente examinando la figura.

## *EJERCICIO 15-1*

Realice las operaciones indicadas, dando cada resultado en la forma $a + bi$.

**1.** $(1 + \sqrt{-4}) + (12 - \sqrt{-9})$
**2.** $(3 - \sqrt{-25}) + (5 - \sqrt{-16})$
**3.** $(4 + \sqrt{-1}) - (6 + \sqrt{-2})$
**4.** $(7 - \sqrt{-8}) - (6 + \sqrt{-18})$
**5.** $(5 + \sqrt{-12}) - (2 + \sqrt{-27})$
**6.** $(-3 - \sqrt{-45}) + (8 - \sqrt{-80})$
**7.** $(2 - 8i)(1 - 2i)$
**8.** $(3 + i\sqrt{2})(2 - i\sqrt{2})$
**9.** $(4 + i)(-4 - i)$
**10.** $(5 + 2i)(2 + 5i)$
**11.** $(3 + \sqrt{-48})(6 - \sqrt{-75})$
**12.** $(7 - \sqrt{-50})(3 - \sqrt{-72})$

**13.** $\dfrac{5 - i}{i}$
**14.** $\dfrac{6 + 12i}{3i}$
**15.** $\dfrac{4}{4 - 3i}$

**16.** $\dfrac{7i}{4 + i}$
**17.** $\dfrac{2 + i}{6 - i}$
**18.** $\dfrac{3 - i}{3 + 2i}$

**19.** $\dfrac{17 + 6i}{2 - 3i}$
**20.** $\dfrac{4 - 3i}{4 + 3i}$
**21.** $\dfrac{9 + 7i}{7 - 9i}$

Simplifique las siguientes expresiones.

**22.** $3i^8 - 2i^3 - 4i^6$
**23.** $5i^{11} - 6i^7 + 7i^9$
**24.** $i^{19} + 2i^{14} + 5i^{23}$
**25.** $10i^{10} - 9i^{11} + 8i^{12}$
**26.** $4i^7 - 9i^{11} + 5i^{15}$
**27.** $6i^3 + 2i^{16} - 6i^{23}$

Resuelva las siguientes ecuaciones para valores reales de $x$ y $y$.

**28.** $4 - ix = y - 3i$
**29.** $x - iy = 2 + 5i$
**30.** $2y - 3 + (4x + 8)i = 0$
**31.** $3x + (y - x)i = 6$
**32.** $x + 2y + 3i = 3 + (2x - y)i$
**33.** $7x + (x - 3y)i = 3y + 9i$

Localice cada número complejo, su negativo y su conjugado.

**34.** $3 - 2i$
**35.** $6 - 5i$
**36.** $0 + 2i$
**37.** $-4 + 0 \cdot i$
**38.** $-2 + 6i$
**39.** $7 - 4i$
**40.** $-4 - 3i$
**41.** $-3i + 4$

Marque los puntos correspondientes a los dos números complejos dados y su suma. Trace después el paralelogramo determinado por los tres puntos y el origen.

**42.** $1 - 3i, 4 + 3i$
**43.** $2 - 2i, 2 + 2i$
**44.** $-2 + 4i, 3 + i$
**45.** $-3 - 4i, 5 - i$

46. Pruebe que la suma y el producto de dos números complejos conjugados son ambos reales.
47. Si el producto de dos números complejos es cero, demuestre que por lo menos uno de los factores es cero.
48. Si el cociente de dos números complejos es un número real, demuestre que uno de los números complejos es un número multiplicado por una constante real.
49. Demuestre que el conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados.

## 15-3. FORMA TRIGONOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO†

Un número complejo expresado como $a + bi$ se dice que está en *forma algebraica*, o *rectangular*. Ahora mostramos cómo expresar un número complejo en otra forma útil.

El punto $P$ (Fig. 15-3) correspondiendo al número $a + bi$ tiene las coordenadas $(a, b)$. La distancia desde el origen hasta $P$ se denota con $r$, y el ángulo del eje de los reales positivos hasta el segmento que une el origen con el punto se denota $\theta$. La distancia $r$, elegida positiva cuando $P$ es cualquier punto distinto del origen, es llamada el *valor absoluto*, o *módulo* de $a + bi$. El ángulo $\theta$ es llamado la *amplitud* o el *argumento*.

Refiriéndonos al diagrama, tenemos las relaciones

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

y

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Así, se infiere que

$$a + bi = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

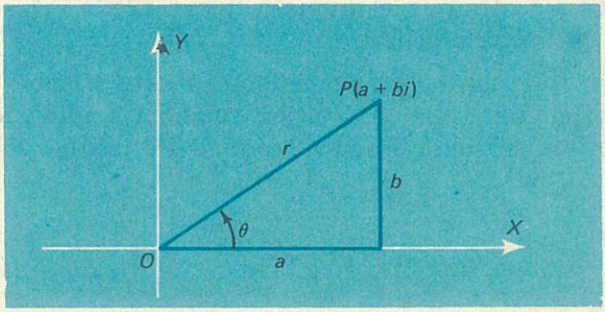



*Figura 15-3*

† Se necesita comprensión de la trigonometría para lo que resta de este capítulo.

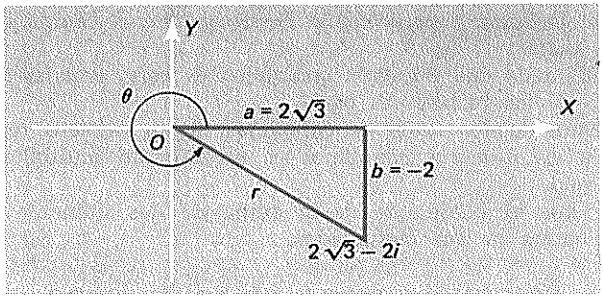



*Figura 15-4*

La expresión $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es llamada la *forma trigonométrica,* o *polar,* de un número complejo. El número $r$ (módulo) nunca es negativo. El factor $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ revela la dirección de $P$ desde el origen. Esto es cierto porque $\theta$ debe satisfacer las ecuaciones $r\cos\theta = a$ y $r \operatorname{sen}\theta = b$. Las fórmulas precedentes son, entonces, suficientes para pasar de la forma algebraica a la forma trigonométrica y viceversa.

EJEMPLO 1. Marque el número $2\sqrt{3} - 2i$ y cámbielo a la forma trigonométrica.

*Solución.* El punto $(2\sqrt{3}, -2)$ representa al número (Fig. 15-4). Haciendo $a = 2\sqrt{3}$ y $b = -2$ en las fórmulas precedentes, obtenemos,

$$r = \sqrt{12 + 4} = 4, \qquad 4\cos\theta = 2\sqrt{3}, \qquad 4\operatorname{sen}\theta = -2$$

Elegimos el mínimo valor positivo de $\theta$ que satisface las dos últimas ecuaciones y tenemos

$$2\sqrt{3} - 2i = 4(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$$

EJEMPLO 2. Marque el número $5(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ y cámbielo a la forma algebraica.

*Solución.* El punto correspondiente a este número se localiza dibujando el ángulo 120° en posición estándar y midiendo 5 unidades desde el origen sobre el lado terminal. De la Fig. 15-5, tenemos

$$a = 5\cos 120° = 5(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{5}{2}$$

$$b = 5\operatorname{sen} 120° = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

y, por tanto,

$$5(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

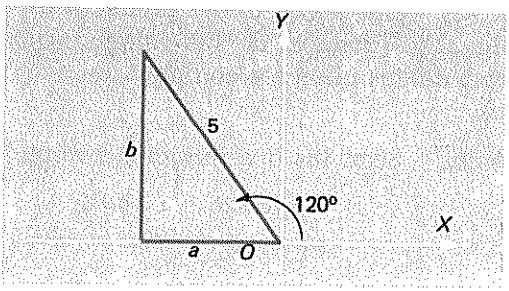



*Figura 15-5*

EJEMPLO 3. Exprese el número $4 + 3i$ en forma trigonométrica.

*Solución.* Puesto que $a = 4$ y $b = 3$, tenemos

$$r = \sqrt{16 + 9} = 5, \qquad \cos\theta = \tfrac{4}{5}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \tfrac{3}{5}$$

Refiriéndonos a la tabla de funciones trigonométricas, que aparece en la Pág. 380, encontramos que $\theta$, hasta el grado más cercano, es 37°. Por tanto,

$$4 + 3i = 5(\cos 37° + i\,\operatorname{sen} 37°)$$

## *EJERCICIO 15-2*

Encuentre cada número complejo y escriba la forma trigonométrica correspondiente.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $1 + i$ | **2.** $4 - 4i$ | **3.** $4 + 0 \cdot i$ |
| **4.** $1 + i\sqrt{3}$ | **5.** $2 - 2i\sqrt{3}$ | **6.** $-\sqrt{3} + i$ |
| **7.** $0 + 2i$ | **8.** $-3 + 0 \cdot i$ | **9.** $0 - i$ |
| **10.** $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ | **11.** $8\sqrt{3} - 8i$ | **12.** $-\sqrt{15} + i\sqrt{5}$ |
| **13.** $\sqrt{7} - i\sqrt{21}$ | **14.** $3 + 4i$ | **15.** $-2 + i$ |
| **16.** $5 - 2i$ | **17.** $-7 - 24i$ | **18.** $8 + 6i$ |

Cambie cada número a la forma algebraica.

| | | |
|---|---|---|
| **19.** $2(\cos 30° + i\,\operatorname{sen} 30°)$ | **20.** $8(\cos 60° + i\,\operatorname{sen} 60°)$ | **21.** $\sqrt{2}(\cos 45° - i\operatorname{sen} 45°)$ |
| **22.** $\cos 135° + i\,\operatorname{sen} 135°$ | **23.** $5(\cos 150° + i\,\operatorname{sen} 150°)$ | **24.** $7(\cos 180° + i\,\operatorname{sen} 180°)$ |
| **25.** $6(\cos 270° + i\operatorname{sen} 270°)$ | **26.** $20(\cos 90° + i\,\operatorname{sen} 90°)$ | **27.** $\cos 128° + i\operatorname{sen} 128°$ |
| **28.** $2(\cos 51° + i\operatorname{sen} 51°)$ | | |

## 15-4. MULTIPLICACION Y DIVISION DE NUMEROS EN FORMA POLAR

El producto y el cociente de dos números complejos pueden escribirse inmediatamente si los números están dados en forma polar.

**Teorema 15-6.** El valor absoluto del producto de dos números complejos es igual al producto de sus valores absolutos. La amplitud del producto de dos números complejos es igual a la suma de sus amplitudes.

*Demostración.* Sean los dos números complejos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\theta_1)$$

y

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\theta_2)$$

Así, multiplicando en la forma usual, obtenemos

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\theta_2) + i(\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)] \end{aligned}$$

Reemplazando $i^2$ por $-1$ y aplicando las identidades para el coseno y el seno de la suma de dos ángulos, obtenemos

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\theta_2) \\ &\qquad = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esta ley de la multiplicación puede aplicarse repetidamente para dar el producto de tres o más números complejos. Para los tres números,

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$z_3 = r_3(\cos\theta_3 + i\,\mathrm{sen}\theta_3)$$

tenemos

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

y entonces

$$z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$$

El producto de $n$ números complejos está dado por

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Sugerimos que el estudiante establezca esta fórmula general por inducción matemática. Sugerimos también que el estudiante demuestre la propiedad asociativa de los números complejos para la multiplicación; esto es, demuestre $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.

**Teorema 15-7.** El valor absoluto del cociente de dos números complejos es el cociente de sus valores absolutos. La amplitud del

cociente es la amplitud del dividendo menos la amplitud del divisor.

*Demostración.* Para encontrar el cociente de $z_1$ dividido por $z_2$, multiplicamos el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor. Así, tenemos que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}$$

El producto de los factores en el numerador es

$$r_1[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)]$$

y el producto de los factores del denominador es

$$r_2(\cos^2\theta_2 - i^2\,\text{sen}^2\,\theta_2) = r_2$$

Ahora aplicamos las identidades trigonométricas para el coseno y el seno de la diferencia de dos ángulos y expresamos el numerador en la forma $r_1[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \text{sen}\ (\theta_1 - \theta_2)]$. Entonces obtenemos la fórmula

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Las dos fórmulas precedentes pueden aplicarse gráficamente para dar el producto y el cociente de dos números complejos. Para encontrar el producto de $r_1(\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\ \theta_1)$ y $r_2(\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\ \theta_2)$, trácese el ángulo $(\theta_1 + \theta_2)$ en posición estándar y mídase sobre el lado terminal del ángulo una distancia igual a $r_1r_2$. Para encontrar el cociente de $r_1(\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\ \theta_1)$ dividido por $r_2(\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\ \theta_2)$, trácese el ángulo $(\theta_1 - \theta_2)$ en posición estándar y mídase una distancia sobre el lado terminal igual a $r_1/r_2$. ■

EJEMPLO 1. Expresemos los números $1 + i\sqrt{3}$ y $3 - 3i$ en formas polares y encuentre su producto.

*Solución.* Tenemos para las formas polares

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$$

y

$$3 - 3i = 3\sqrt{2}(\cos 315° + i\,\text{sen}\,315°)$$

Por tanto,

$$(1 + i\sqrt{3})(3 - 3i) = 6\sqrt{2}(\cos 375° + i\,\text{sen}\,375°)$$

$$= 6\sqrt{2}(\cos 15° + i\,\text{sen}\,15°)$$

EJEMPLO 2. Encontremos el cociente de $12(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ dividido por $3(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)$.

*Solución.* Aplicando la ley para la división, obtenemos

$$\frac{12(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)}{3(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)} = 4[\cos(-40°) + i \operatorname{sen}(-40°)]$$

$$= 4(\cos 320° + i \operatorname{sen} 320°)$$

## *EJERCICIO 15-3*

Realice las operaciones indicadas, dejando cada resultado en la forma $a + bi$.

1. $2(\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°) \cdot 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
2. $5(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \cdot 4(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
3. $3(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°) \cdot 6(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)$
4. $7(\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°) \cdot 2(\cos 95° + i \operatorname{sen} 95°)$
5. $9(\cos 175° + i \operatorname{sen} 175°) \cdot 3(\cos 275° + i \operatorname{sen} 275°)$
6. $\dfrac{\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°}{\cos 40° - i \operatorname{sen} 40°}$
7. $\dfrac{4(\cos 266° + i \operatorname{sen} 266°)}{2(\cos 86° + i \operatorname{sen} 86°)}$
8. $\dfrac{9(\cos 313° + i \operatorname{sen} 313°)}{3(\cos 268° + i \operatorname{sen} 268°)}$
9. $\dfrac{21(\cos 33° + i \operatorname{sen} 33°)}{3(\cos 93° + i \operatorname{sen} 93°)}$

Exprese cada número en forma trigonométrica y luego realice las operaciones indicadas. Deje los resultados en forma trigonométrica.

10. $(1 - i)(1 + i\sqrt{3})$
11. $(\sqrt{3} + i)(1 + i)$
12. $(3 - 3i)(4 - 4i)$
13. $4i(5 + 5i)$
14. $3i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$
15. $(2 - 2i)(-\sqrt{3} + i)(-1 - i\sqrt{3})$
16. $\dfrac{3}{2 - 2i}$
17. $\dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{1 - i\sqrt{3}}$
18. $\dfrac{4}{3\sqrt{3} - 3i}$
19. $\dfrac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}}$

Realice gráficamente las operaciones indicadas.

20. $2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) \cdot 3(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$
21. $4(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) \cdot (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$
22. $5(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) \cdot 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
23. $\dfrac{4(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)}{2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)}$
24. $\dfrac{6(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)}{3(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)}$

## 15-5. POTENCIAS Y RAICES DE NUMEROS

En esta sección nos ocuparemos del problema de encontrar potencias enteras positivas de los números complejos. El siguiente teorema prepara el camino en esta dirección.

**Teorema 15-8.** Si $n$ es cualquier número real, la $n$-ésima potencia del número complejo $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ está dada por la fórmula

$$[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta). \tag{1}$$

No demostraremos este teorema. Señalamos, sin embargo, que el teorema puede establecerse con facilidad para el caso en que $n$ sea un entero positivo Esto se obtiene simplemente haciendo cada uno de los factores en la fórmula para el producto de $n$ números complejos igual a $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Cuando $n$ es un entero positivo el teorema precedente se llama *teorema de De Moivre*, en honor del matemático francés Abraham De Moivre.

La fórmula (1) da rápidamente una potencia entera positiva de un número complejo. Sin embargo, para encontrar las raíces de números convertimos la fórmula a una más usual.

El número $s(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ es, por definición, una $n$-ésima raíz de $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ si

$$[s(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Aplicamos la fórmula de De Moivre (1) al miembro izquierdo de esta ecuación y, por la periodicidad del seno y coseno, reemplazamos $\theta$ por $\theta + k\cdot 360°$, donde $k$ es cualquier entero. Esto da

$$s^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha) = r[\cos(\theta + k\cdot 360°) + i\,\text{sen}(\theta + k\cdot 360°)]$$

Buscamos valores de $s$ y $\alpha$ que satisfagan a esta ecuación. Consecuentemente, igualamos los módulos y las amplitudes de los miembros de la ecuación. Esto da

$$s^n = r \quad \text{y} \quad n\alpha = \theta + k\cdot 360°$$

por tanto, resolviendo para $s$ y $\alpha$, tenemos

$$s = \sqrt[n]{r} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\theta + k\cdot 360°}{n}$$

Asimismo,

$$s(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + k\cdot 360°}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta + k\cdot 360°}{n}\right)$$

El miembro derecho de esta ecuación tomará $n$ valores distintos si se le dan a $k$ los valores $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Cualquier otro valor entero de $k$ repite uno de los valores ya encontrados y, por tanto, no conduce a ninguna nueva raíz. Así, hay $n$ $n$-ésimas raíces diferentes de cualquier número no nulo. Y puede observarse que las amplitudes son tales que gráficamente las raíces están espaciadas en forma

similar sobre la circunferencia de un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$. Por tanto, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 15-9.** Un número no nulo $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ tiene $n$ $n$-ésimas raíces dadas por la fórmula

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + k\cdot 360^\circ}{n} + i\,\text{sen}\frac{\theta + k\cdot 360^\circ}{n}\right) \tag{2}$$

donde $k = 0, 1, 2. \ldots, n-1$.

EJEMPLO 1. Encontremos la cuarta potencia de $(1 - i\sqrt{3})$.

*Solución.* Cambiando primero a la forma polar, obtenemos

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ)$$

Aplicando la fórmula (1) con $n = 4$, tenemos

$$\begin{aligned}(1 - i\sqrt{3})^4 &= [2(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ)]^4\\ &= 2^4(\cos 1200^\circ + i\,\text{sen}\,1200^\circ)\\ &= 16(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ)\\ &= -8 + 8i\sqrt{3}\end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Encontremos las raíces cúbicas de $-8$.

*Solución.* Primero expresamos $-8$ en forma polar. Así,

$$-8 = 8[\cos(180^\circ + k\cdot 360^\circ) + i\,\text{sen}(180^\circ + k\cdot 360^\circ)]$$

Ahora aplicamos la fórmula (2) para raíces de un número y tenemos

$$\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + i\,\text{sen}\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right)$$

$$= 2[\cos(60^\circ + k\cdot 120^\circ) + i\,\text{sen}(60^\circ + k\cdot 120^\circ)]$$

Asignando a $k$ los valores 0, 1 y 2, sucesivamente, encontramos las tres raíces cúbicas de $-8$ que son

$$2(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$2(\cos 180^\circ + i\,\text{sen}\,180^\circ) = -2$$

$$2(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ) = 1 - i\sqrt{3}$$

Los números $1 + i\sqrt{3}$, $-2$ y $1 - i\sqrt{3}$ son la forma rectangular de las raíces cúbicas de $-8$. Estas son todas las raíces cúbicas de

$-8$; cualquier otro valor entero de $k$ repite una de estas raíces. En particular, si los valores 3, 4 y 5 se asignan a $k$, las raíces se repiten en el orden ya mencionado.

EJEMPLO 3. Encontremos las cinco raíces quintas de $-16 + 16i\sqrt{3}$.

*Solución.* La forma polar de $-16 + 16i\sqrt{3}$ es

$$32[\cos(120° + k \cdot 360°) + i\,\text{sen}(120° + k \cdot 360°)]$$

De la fórmula (2), escribimos

$$\sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{120° + k \cdot 360°}{5} + i\,\text{sen}\frac{120° + k \cdot 360°}{5}\right)$$

$$= 2[\cos(24° + k \cdot 72°) + i\,\text{sen}(24° + k \cdot 72°)]$$

Las raíces deseadas se obtienen asignando a $k$ los valores 0, 1, 2, 3, 4, sucesivamente, en la última expresión. Así, las cinco raíces quintas de $-16 + 16i\sqrt{3}$ son

$$2(\cos 24° + i\,\text{sen}\ 24°)$$

$$2(\cos 96° + i\,\text{sen}\ 96°)$$

$$2(\cos 168° + i\,\text{sen}\ 168°)$$

$$2(\cos 240° + i\,\text{sen}\ 240°)$$

$$2(\cos 312° + i\,\text{sen}\ 312°)$$

Los puntos que representan estas raíces están igualmente espaciados sobre la circunferencia de radio 2 en la Fig. 15-6.

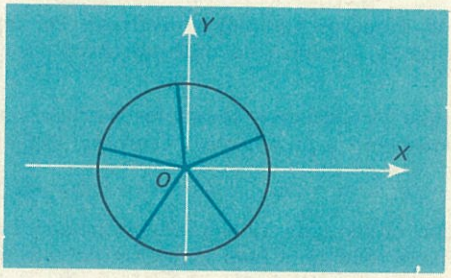



*Figura 15-6*

## *EJERCICIO 15-4*

Encuentre las potencias indicadas en los siguientes problemas. Exprese cada resultado en la forma trigonométrica.

1. $[3(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°)]^2$
2. $[2(\cos 35° + i \operatorname{sen} 35°)]^3$
3. $[2(\cos 118° + i \operatorname{sen} 118°)]^3$
4. $[5(\cos 220° + i \operatorname{sen} 220°)]^2$
5. $(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)^8$
6. $(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)^{10}$
7. $(1 + i)^5$
8. $(1 - i)^4$
9. $(1 + i\sqrt{3})^6$
10. $(\sqrt{3} - i)^4$
11. $(-\sqrt{3} + i)^{10}$
12. $(2 - 2i)^5$

Encuentre las raíces indicadas de los números dados Deje cada resultado en la forma trigonométrica.

13. Las raíces cuadradas de $16(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$
14. Las raíces cuadradas de $25(\cos 134° + i \operatorname{sen} 134°)$
15. Las raíces cúbicas de $27(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$
16. Las raíces cuartas de $81(\cos 160° + i \operatorname{sen} 160°)$
17. Las raíces cuartas de $16(\cos 280° + i \operatorname{sen} 280°)$
18. Las raíces quintas de $\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°$
19. Las raíces cúbicas de $8 + 8i$
20. Las raíces cúbicas de $27i$
21. Las raíces cuartas de $-i$
22. Las raíces cuartas de 81
23. Las raíces quintas de $-32i$.
24. Las raíces quintas de $1 + i$.

Encuentre las potencias indicadas y las raíces en los siguientes problemas, dando el resultado en la forma algebraica.

25. $[2(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)]^6$
26. $[3(\cos 36° + i \operatorname{sen} 36°)]^5$
27. $(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)^4$
28. $(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)^4$
29. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$
30. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$
31. Las raíces cúbicas de $-4\sqrt{3} + 4i$
32. Las raíces cúbicas de $27(4 + 4i\sqrt{3})$
33. Las raíces cúbicas de $-8 + 8i$
34. Las raíces cuartas de $8 + 8i\sqrt{3}$

Resuelva las siguientes ecuaciones.

35. $x^4 + 1 = 0$
36. $x^6 - 1 = 0$
37. $x^4 - i = 0$
38. $x^2 + (1 - i)x - i = 0$
39. $x^2 - 2x + (1 + i) = 0$

40. Demuestre que los números complejos obedecen las leyes de cerradura y conmutatividad para la adición y la multiplicación (ver los axiomas 1 y 2 Sec. 2-2).

Hemos dicho que los números complejos obedecen a la ley distributiva de la multiplicación respecto a la adición (Teorema 15-5). Esto es:

$$(a + bi)[(c + di) + (e + fi)] = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi)$$

Demostraremos que el teorema es verdadero usando la Definición 15-2 y el Teorema 15-3 para reducir el lado izquierdo de esta ecuación a la forma que tiene el lado derecho. El lector deberá seguir cuidadosamente todos los pasos.

$$\begin{aligned}
&(a + bi)[(c + di) + (e + fi)] \\
&\quad = (a + bi)[(c + e) + (d + f)i] \\
&\quad = [a(c + e) - b(d + f)] + [b(c + e) + a(d + f)]i \\
&\quad = [(ac - bd) + (ae - bf)] + [(bc + ad)i + (be + af)i] \\
&\quad = [(ac - bd) + (bc + ad)i] + [(ae - bf) + (be + af)i] \\
&\quad = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi)
\end{aligned}$$

Resolver cada ecuación lineal en $x$. Expresar el resultado en la forma $a + bi$

**41.** $2ix = 3 - i$
**42.** $3ix - 8 = i$
**43.** $(3 + i)x = 4 + i$
**44.** $(5i - 2)x = 5i + 2$
**45.** $(4 + i)x = 3 - 2i$
**46.** $(6 - i)x = 2i + 3$

Utilizando la fórmula cuadrática resolver la ecuación

$$2ix^2 - 3x + 4 + i = 0$$

tenemos $a = 2i$, $b = -3$, y $c = 4 + i$. Sustituyendo, se encuentra

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8i(4 + i)}}{4i}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{17 - 32i}}{4i}$$

$$= \frac{3i \pm \sqrt{32i - 17}}{-4}$$

$$= \frac{-3i \pm \sqrt{32i - 17}}{4}$$

Utilice la fórmula cuadrática (Teorema 8-1 Sec. 8-2) para resolver cada ecuación.

**47.** $2x^2 - 4ix + i = 0$
**48.** $3x^2 - 2ix - 3i = 0$
**49.** $4ix^2 + 2ix - 1 = 0$
**50.** $ix^2 + (3 - i)x + 2 = 0$
**51.** $3ix^2 - 2x - (1 + i) = 0$
**52.** $5ix^2 + 3x + (2 + 3i) = 0$
**53.** $(1 + i)x^2 + 3x + (2 + 2i) = 0$
**54.** $(2 - i)x^2 - 4x - (3 - 2i) = 0$

Muestre que el valor absoluto de un número complejo es igual al valor absoluto de su conjugado. Esto es,

$$|a + bi| = |a - bi|$$

Muestre que $|(a + bi)(c + di)| = |(a + bi)| \cdot |c + di|$

Muestre que $|(a + bi) + (c + di)| \leq |a + bi| \cdot |c + di|$

En la Sec. 7-7 se introdujeron dos maneras de expresar un número complejo, a saber, $a + bi$, y el par ordenado $(a, b)$ donde $a$ y $b$ son números reales e $i = \sqrt{-1}$. Hasta el momento, en este capítulo no hemos usado más que la forma $a + bi$, aunque hubiéramos podido usar la otra forma $(a, b)$. Tomando en consideración esta otra forma expresaremos la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números complejos, como a continuación.

Suma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Diferencia $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

Producto $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

Cociente $\dfrac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$ ($c$, $d$ no simultáneamente nulos)

EJEMPLOS:

$$(2, 3) + (4, 1) = (2 + 4, 3 + 1) = (6, 4)$$

$$(5, -2) + (-3, 6) = (5 - 3, -2 + 6) = (2, 4)$$

$$(6, -1) - (2, 2) = (6 - 2, -1 - 2) = (4, -3)$$

$$(3, 5) \cdot (4, -1) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot (-1), 5 \cdot 4 + 3(-1) = (17, 17)$$

$$\frac{(2, 3)}{(5, 6)} = \left(\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{25 + 36}, \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 6}{25 + 36}\right) = \left(\frac{28}{61}, \frac{3}{61}\right)$$

Lleve a cabo las operaciones indicadas expresando cada resultado como un par ordenado de números.

**55.** $(2, 3) + (1, 4)$

**56.** $(-3, 7) + (4, 2)$

**57.** $(5, 4) + (3, 2)$

**58.** $(3, -1) + (-5, 4)$

**59.** $(4, 5) - (3, 2)$

**60.** $(2, -3) - (4, -2)$

**61.** $(-3, 4) - (-4, 3)$

**62.** $(3, -6) - (-4, -2)$

**63.** $(3, 4) \cdot (1, 2)$

**64.** $(5, 2) \cdot (4, 3)$

**65.** $(-2, 7) \cdot (3, 2)$

**66.** $(-3\ 5) \cdot (-6, -2)$

**67.** $\dfrac{(2, 4)}{(-1, 2)}$

**68.** $\dfrac{(-10, 5)}{(2, 1)}$

**69.** $\dfrac{(26, 13)}{(2, 3)}$

**70.** $\dfrac{(15, 5)}{(-3, 1)}$

# Capítulo 16

# MATRICES Y DETERMINANTES

## 16-1. MATRICES Y ECUACIONES LINEALES

En este capítulo daremos una breve introducción a las matrices, estudiaremos las determinantes y aplicaremos estos conceptos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Empezamos por resolver un sistema de ecuaciones por el uso de matrices.

**Definición 16-1.** Un arreglo rectangular de números formando $m$ hileras y $n$ columnas es llamado una *matriz*. Cada número de una matriz es llamado un *elemento*.

A continuación tres ejemplos de matrices, denotando a cada una con una letra mayúscula:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Es costumbre colocar corchetes, paréntesis o barras verticales dobles para encerrar los elementos de una matriz. La matriz $A$ tiene 2 columnas y 2 hileras, la matriz $B$ tiene 2 hileras y 3 columnas y la matriz $C$ tiene 3 hileras y 3 columnas. De acuerdo con esto son llamadas matrices 2 por 2, 2 por 3 y 3 por 3, respectivamente. En general, una matriz de $m$ hileras y $n$ columnas es una matriz $m$ por $n$, indicando el número de hileras en primer lugar.

Veamos ahora cómo un sistema de ecuaciones lineales puede representarse mediante el uso de una matriz. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 9 \\ x - 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 4y + 6z &= 5 \end{aligned} \tag{1}$$

Formamos una matriz 3 por 3 usando los coeficientes de las variables, y formamos una matriz 3 por 4 obtenida de la anterior, agregando la columna de los términos constantes. Así, tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

La primera matriz es llamada la *matriz de los coeficientes* y la segunda es llamada la *matriz aumentada* del sistema dado. Notamos que ambas matrices de un sistema tal como (1) pueden escribirse de inmediato, y que el sistema de ecuaciones lineales puede ser escrito rápidamente conociendo la matriz aumentada.

Antes de resolver un sistema de ecuaciones con el uso de matrices, recordamos que las siguientes operaciones pueden realizarse en un sistema tal como (1) para obtener sistemas equivalentes:

1. Los miembros de cualquier ecuación pueden multiplicarse por una constante no nula.
2. Los números de una ecuación pueden multiplicarse por una constante no nula y sumados a (o sustraídos de) los miembros de cualquier otra ecuación.
3. Las ecuaciones pueden escribirse en cualquier orden que se escoja.

Interpretando estas operaciones con respecto a la matriz representando al sistema de ecuaciones, vemos que

1. Los elementos de cualquier hilera pueden multiplicarse por una constante no nula.
2. Los elementos de cualquier hilera pueden multiplicarse por una constante no nula y sumarse a los elementos correspondientes de cualquier otra hilera.
3. Las hileras pueden escribirse en cualquier orden deseado.

EJEMPLO. Usemos matrices para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + y - 5z &= 2 \\ -x + 4y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

*Solución.* La matriz aumentada representando este sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para pasar a una matriz que tiene dos ceros en una de las primeras tres columnas, multiplicamos los elementos de la tercera hilera de $A$ por 3 y sustraemos de los correspondientes de la primera hilera, y en seguida sumamos la tercera hilera a la segunda. Esto da la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Continuando con $B$, multiplicamos la segunda hilera por 2 y la sumamos a la primera. Después sumamos la segunda hilera a la tercera para obtener $C$. Ahora dividimos la primera hilera de $C$ por 7 y tenemos

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{7} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{41}{7} \end{bmatrix}$$

El elemento 1 en la primera hilera de $D$ puede ser empleado ahora convenientemente para pasar a $E$ con dos ceros en la segunda columna. Obtenemos $E$ multiplicando la primera hilera de $D$ por 6 y sustrayendo de la segunda hilera, y después multiplicando la primera hilera de $D$ por 8 y sustrayendo de la tercera hilera. Finalmente, cambiando el orden de las hileras que aparecen en $E$, tenemos

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{7} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones correspondientes a la matriz $F$ son $x = \frac{41}{7}$, $y = \frac{1}{7}$ y $z = \frac{22}{7}$. Puesto que los sistemas de ecuaciones correspondientes a las seis matrices son todos equivalentes, vemos que el conjunto de soluciones del sistema dado es $\{(\frac{41}{7}, \frac{1}{7}, \frac{22}{7})\}$.

## *EJERCICIO 16-1*

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando matrices.

1. $2x - y + 3z = 9$
   $3x + y + 2z = 11$
   $x - y + z = 3$

2. $x - 4y + 5z = -4$
   $x + 3y + z = 6$
   $2x - 3y + 2z = -6$

**3.** $3x - 4y - z = 1$
$x - y + 3z = 3$
$3x - 2y + 2z = 0$

**4.** $x - 3y - 7z = 6$
$4x + y = 7$
$2x + 3y + z = 9$

**5.** $x + y + z = 0$
$3x + y + z = 2$
$5x - 2y + 3z = -8$

**6.** $3x - 5z = -1$
$2x + 7y = 6$
$x + y + z = 5$

**7.** $x - y - z = 0$
$2x + 3y + 6z = 3$
$4x + 2y + 2z = 3$

**8.** $x + 2y + 3z = 4$
$2x + y + z = 1$
$3x + 3y + z = 2$

**9.** $x + y - z + w = 0$
$3x + 2y - 2z - 3w = 7$
$2x - 4y + 3z + 2w = 8$
$2x + 2y - z - w = 1$

**10.** $x - y + z - w = 3$
$x + y + z + w = -5$
$x - 3y - z - w = 9$
$x + y - z + w = 1$

## 16-2. DETERMINANTES DE ORDENES DOS Y TRES

Una matriz de $n$ hileras y $n$ columnas es llamada matriz cuadrada de orden $n$. Con una matriz cuadrada vamos a asociar un número llamado el *determinante* de la matriz. Se dice que el determinante de una matriz es del mismo orden que ésta. Definimos el determinante de la matriz de segundo orden

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

como el número $a_1b_2 - a_2b_1$. Para simbolizar esta definición, escribimos

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Es costumbre indicar el determinante de una matriz encerrando los elementos de la misma entre barras verticales en vez de paréntesis

EJEMPLO 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - (-2)(4) = 15 + 8 = 23$$

En seguida mostramos cómo expresar la solución de un sistema de ecuaciones lineales usando determinantes. El sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

puede resolverse por cualquiera de los métodos de la Sec. 6-6 para dar

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{2}$$

El numerador y denominador de cada una de estas fracciones son los números asociados con matrices de orden dos. Por tanto, podemos expresar la solución en la forma simbólica

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{3}$$

Estas fórmulas pueden aplicarse para encontrar la solución de cualquier sistema consistente en la forma (1), esto es, sistemas para los cuales $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

EJEMPLO 2. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$3x + 2y = 3$$
$$2x - 5y = -17$$

*Solución.* Tomando $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3$ y $a_2 = 2$, $b_2 = -5$, $c_2 = -17$ y sustituyendo en las fórmulas (3), obtenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -17 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-15 + 34}{-15 - 4} = \frac{19}{-19} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-51 - 6}{-15 - 4} = \frac{-57}{-19} = 3$$

Definimos el determinante de una matriz de tercer orden por la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

En esta ecuación tenemos un símbolo para el determinante de una matriz de tercer orden y símbolos para las determinantes de tres matrices de segundo orden. Los símbolos de este tipo, aunque denotan valores de determinantes de matrices, con frecuencia son llamados simplemente determinantes.

EJEMPLO 3. Encontremos el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

*Solución.* Empleando la definición de un determinante de tercer orden y evaluando los determinantes de segundo orden resultantes, encontramos

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(15 - 1) - 5(-5 - 4) + 2(1 - 12)$$

$$= 28 + 5 - 22$$

$$= 11$$

## *EJERCICIO 16-2*

Evalúe cada uno de los siguientes determinantes.

**1.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & -7 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}$

**4.** $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 3a & 2 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} x & y \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones para $x$ y $y$, usando determinantes.

**7.** $4x + 3y = 1$
$2x + 5y = 11$

**8.** $2x - 4y = -3$
$4x + 2y = 9$

**9.** $3x - 4y = 7$
$5x - 5y = 8$

**10.** $2x = 7y + 17$
$4x = 5y + 25$

**11.** $7x = 4 - 3y$
$4x = 3 - 2y$

**12.** $5x + 7y = -2$
$4x + 6y = -3$

**13.** $ax - 3by = c$
$2ax + 2by = 9c$

**14.** $ax - by = 2b$
$3ax + 4by = 7a - b$

**15.** $3x + ay = 4$
$2x + ay = 2$

Evalúe cada uno de los determinantes de tercer orden.

**16.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **17.** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ **18.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

**19.** $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **20.** $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 0 & -9 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ **21.** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

Resuelva las ecuaciones siguientes en $x$.

**22.** $\begin{vmatrix} x & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 2$ **23.** $\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ x & -3 \end{vmatrix} = 8$ **24.** $\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 2+x & 4 \end{vmatrix} = 0$

**25.** $\begin{vmatrix} 6 & -x \\ x-4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ **26.** $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ **27.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & x & -5 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$

## 16-3. DETERMINANTES DE ORDEN $n$

Hemos definido determinantes de órdenes dos y tres. Deseamos ahora dar una definición más general de determinantes que se apliquen a aquellos de orden uno, dos, tres y órdenes superiores. Sin embargo, expliquemos primero la noción de inversión que es útil al definir y estudiar las propiedades de los determinantes. En una sucesión de enteros positivos, ocurre una *inversión* siempre que un número mayor precede a uno menor. Así, la sucesión 2143 tiene dos inversiones porque 2 precede a 1, y 4 precede a 3. Pero 5143 tiene cuatro inversiones; 5 precediendo a 1, 4 y 3 da tres inversiones y 4 precediendo a 3 da otra inversión.

**Definición 16-2.** Si $A$ es una matriz $n$ por $n$, el determinante de la matriz es denotado simbólicamente por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2_n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Los subíndices denotan aquí la hilera y la columna de cada número, siendo el primer subíndice el que da la hilera y el segundo el que da la columna. Así, $a_{34}$ representa al número en la tercera hilera y cuarta columna, y $a_{ij}$ representa al número en la $i$-ésima hilera y $j$-ésima columna.

El determinante representa al número que es la suma algebraica de todos los posibles productos obtenidos:

1. Tomando como factores uno y sólo un número de cada hilera y de cada columna, y
2. Dando a cada producto el signo más o el signo menos, según haya un número par o impar de inversiones del segundo subíndice (correspondiente a la columna) cuando los factores del producto se escriben de modo que el primer subíndice (correspondiente a la hilera) no presente inversiones.

Cada uno de los números en el arreglo cuadrado es llamado un *elemento* del determinante. Los elementos a lo largo de la línea que va de la esquina izquierda superior a la esquina derecha inferior forman la *diagonal principal*. Cada uno de los productos con el signo descrito en la definición es llamado *término* del determinante y la suma de los términos es el *desarrollo*, o *valor*, del determinante. Hay, por supuesto, $n$ factores en cada término ya que se toma uno y sólo un factor de cada hilera y cada columna.

De acuerdo con la definición precedente, el desarrollo de un determinante de tercer orden está dado por la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

En este desarrollo cada producto tiene exactamente un factor de cada hilera y de cada columna, y los primeros subíndices están en el orden 1, 2, 3. Las inversiones de los segundos subíndices de los factores de los términos en el orden escrito son, respectivamente, cero, uno, uno, dos, dos, tres. Los signos de los términos con un número par de inversiones son positivos y los que corresponden a un número impar de inversiones son negativos.

## 16-4. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES*

A partir de la definición de determinantes, se pueden establecer ciertas propiedades interesantes y útiles. En esta sección vamos a considerar algunas de las propiedades elementales, incluyendo aquellas que conducen a un método práctico de evaluación de determinantes.

* Dependiendo del tiempo disponible y de otras circunstancias, se aconseja ilustrar algunos de los teoremas siguientes omitiendo las demostraciones más extensas.

**Teorema 16-1.** El desarrollo de un determinante de orden $n$ tiene $n!$ términos.

*Demostración.* Si los $n$ factores de un término se escriben teniendo los primeros subíndices en orden de magnitud creciente, entonces cualquier arreglo de los enteros de 1 a $n$, inclusive, arreglo que aparece en los segundos subíndices, nos da los factores de un término. Pero los $n$ subíndices pueden ser asignados de $n!$ maneras distintas (Sec. 12-2). Ya que hay un término para cada permutación de los segundos subíndices, el desarrollo tiene $n!$ términos. ■

**Teorema 16-2.** El valor de un determinante no cambia si se intercambian hileras y columnas correspondientes.

Para ilustrar el teorema con un determinante de tercer orden, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

*Demostración.* Escribamos $D$ para representar un determinante de orden $n$ y $D'$ para el determinante después que las columnas de $D$ han sido cambiadas por las hileras correspondientes. Si los primeros subíndices de $D$ denotan hileras y los segundos subíndices columnas, entonces, los primeros subíndices de $D'$ denotan columnas, y los segundos subíndices denotan hileras. La definición de determinante requiere que un término de $D$ y el término correspondiente de $D'$ tengan los mismos factores. Pero el signo del término de $D$ está determinado por las inversiones de los segundos subíndices cuando los primeros subíndices están en orden de magnitud creciente; mientras que el signo del término correspondiente de $D'$ está determinado por las inversiones de los primeros subíndices cuando los segundos subíndices están en orden de magnitud. Así, los términos correspondientes de los determinantes son los mismos, excepto tal vez por los signos. Ahora supongamos que intercambiamos factores adyacentes del término de $D'$ repetidamente hasta que los primeros subíndices estén en orden de magnitud creciente. Una sucesión tal de intercambios introduce un número de inversiones en los segundos subíndices que es igual al número de inversiones que aparecían en los primeros subíndices. Por tanto, los términos correspondientes tienen el mismo signo así como los mismos factores y, en consecuencia, el determinante dado y el nuevo determinante tienen el mismo valor. ■

*Nota.* Puesto que el intercambio de columnas e hileras de un determinante no altera el valor de éste, cualquier propiedad de un de-

terminante relativa a las hileras es también una propiedad relativa a las columnas, y viceversa. De este modo, la demostración de una propiedad que atañe a hileras o a columnas de un determinante se hará tan sólo para hileras o columnas.

**Teorema 16-3.** Si cada uno de los elementos de una hilera (o columna) de un determinante es igual a cero, entonces el valor del determinante es igual a cero.

*Demostración.* Esta propiedad se deduce de inmediato a partir del hecho de que cada término del desarrollo tiene un factor de cada una de las hileras y de cada una de las columnas del determinante. Un producto en el que cero es un factor es, desde luego, cero. ■

**Teorema 16-4.** Si dos columnas (o hileras) de un determinante se intercambian, el signo del determinante cambia.

*Demostración.* Supongamos primero que las dos columnas que se intercambian son adyacentes. En este caso el intercambio dejará los primeros subíndices de los factores de cada término del desarrollo inalterados, pero va a alterar el número de inversiones de los segundos subíndices en uno. Así, el signo del determinante se invierte.

Ahora, si hay $k$ columnas entre las dos columnas que se intercambiarán, las dos columnas particulares pueden ser traídas a sus nuevas posiciones mediante una sucesión de intercambios de columnas adyacentes. Primero, $k$ intercambios llevarán a las dos columnas particulares a posiciones adyacentes, y un intercambio de las dos pone una columna en la posición deseada y $k$ más intercambios llevarán a la otra columna a su posición. Esto significa que los $2k + 1$ intercambios realizan el movimiento de columnas indicado. Ya que el intercambio de dos columnas adyacentes de un determinante produce un determinante cuyo signo es opuesto al inicial, la sucesión de los intercambios produce $2k + 1$ inversiones de signos y, en consecuencia, el signo del determinante final es opuesto al signo del determinante original. ■

**Teorema 16-5.** Si dos columnas (o hileras) de un determinante son idénticas, el valor del determinante es cero.

*Demostración.* Si dos columnas idénticas se intercambian, el valor del determinante no cambia. Pero, por el Teorema 16-4, el signo del determinante se invierte. Así, si $D$ es el valor del determinante después del intercambio de las columnas idénticas, dicho valor será $-D$. Entonces tenemos $D = -D$, $2D = 0$ y $D = 0$. ■

**Teorema 16-6.** Si cada uno de los elementos de una columna (o hilera) de un determinante se multiplica por un número $m$, el valor del determinante se multiplica por $m$.

*Demostración.* Puesto que cada término del desarrollo tiene uno y sólo un factor de cada hilera y de cada columna, $m$ es un factor de cada término del desarrollo del nuevo determinante. Entonces el desarrollo puede escribirse como $m$ veces el desarrollo del primer determinante. ■

EJEMPLO.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5m & 1 \\ 4 & m & 2 \\ 3 & 8m & 7 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

**Corolario.** Si cada elemento de una columna (o hilera) de un determinante es una constante veces los elementos correspondientes de otra columna (o hilera), el valor del determinante es cero.

Dejamos al estudiante la demostración de este corolario.

**Teorema 16-7.** Si cada elemento de una columna, la $k$-ésima digamos, de un determinante se expresa como la suma de dos términos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes, donde

(a) los elementos de cada uno de los dos determinantes son idénticos a los elementos correspondientes del determinante dado, excepto para los elementos de la $k$-ésima columna;
(b) los primeros términos de los elementos de la $k$-ésima columna del determinante dado forman la $k$-ésima columna de uno de los dos determinantes y los segundos términos forman la $k$-ésima columna del otro determinante.

*Demostración.* Considérense los determinantes en la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cada término del desarrollo del determinante a la izquierda contiene la suma de los dos términos como un factor, que es igual a la suma de los términos correspondientes de los determinantes del lado derecho. Por ejemplo, $(a_{11} + b_{11})a_{22}a_{33}$ es un término del lado izquierdo de la ecuación, y los términos correspondientes, $a_{11}a_{22}a_{33}$ y $b_{11}a_{22}a_{33}$, aparecen en el lado derecho. Así, el desarrollo del lado izquierdo de la ecuación es igual a la suma de los desarrollos en el lado derecho.

El razonamiento usado aquí se aplica en el caso de un determinante de cualquier orden. Concluimos, por lo tanto, que el teorema es válido. ■

**Teorema 16-8.** El valor de un determinante no se altera si cada elemento de una columna (o hilera) se multiplica por un número $m$ y se suma a los elementos correspondientes de cualquier columna (o hilera).

*Demostración.* Mostremos que

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ma_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ma_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ma_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por el Teorema 16-7, el determinante de la izquierda puede escribirse como la suma de dos determinantes. Esto es,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ma_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ma_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ma_{31} \end{vmatrix}$$

Pero el segundo de estos determinantes es igual a cero, puesto que puede expresarse como $m$ veces un determinante con primera y tercera columnas idénticas.

En cuanto que el método de la demostración para un determinante de tercer orden se aplica a un determinante de cualquier orden, concluimos que el teorema es válido. ■

EJEMPLO. Sin desarrollar el determinante encontremos la raíz de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$$

*Solución.* Si reemplazamos $x$ por 2, los elementos de la tercera columna vienen a ser el doble de los elementos correspondientes de la segunda columna, y el valor del determinante es cero. ¿Por qué cero? Por tanto, $x = 2$ es la raíz de la ecuación.

### *EJERCICIO 16-3*

**Sin desarrollar demuestre que el valor de cada uno de los siguientes determinantes es cero.**

**1.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 5 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

**4.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Sin desarrollar los determinantes, demuestre que las siguientes ecuaciones son válidas.

7. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 15 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

Sin desarrollar los determinantes, resuelva las siguientes ecuaciones en $x$.

11. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & x & 12 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

12. $\begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 4 & x^2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ x & x^2 & x^3 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$

14. $\begin{vmatrix} x & a & -3 \\ x^2 & a^2 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

## 16-5. DESARROLLO POR COFACTORES

La definición del determinante de una matriz (Sec. 16-3) describe su desarrollo y, por tanto, nos facilita un medio para evaluar el determinante. Pero evaluar un determinante de orden cuatro, o mayor, directamente de la definición resulta tedioso. En esta sección vamos a desarrollar un método práctico para encontrar los valores de determinantes. Sin embargo, como un paso preliminar debemos introducir la idea de un menor y de un cofactor correspondiendo a un elemento de un determinante.

**Definición 16-3.** El *menor* de un elemento de un determinante de orden $n$ es el determinante de orden $n - 1$ que queda después de retirar la columna y la hilera a que pertenece el elemento.

EJEMPLO 1. Denotando los menores de $a_{23}$ y $a_{41}$ del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{1}$$

por $A_{23}$ y $A_{41}$, tenemos

$$A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad A_{41} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

**Definición 16-4.** El *cofactor* de un elemento $a_{ij}$ de un determinante es el producto del menor de $a_{ij}$ y $(-1)^{i+j}$. Esto es, si el menor y el cofactor de $a_{ij}$ son denotados, respectivamente, por $A_{ij}$ y $C_{ij}$, entonces $C_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$.

De acuerdo con esta definición, los cofactores de $a_{23}$, $a_{41}$ y $a_{42}$ del determinante anterior son, respectivamente, $C_{23} = -A_{23}$, $C_{41} = -A_{41}$, y $C_{42} = A_{42}$.

**Teorema 16-9.** El valor de un determinante puede obtenerse mediante las siguientes operaciones:

(a) Multiplicar cada elemento de una fila (o columna) elegida por su cofactor.
(b) Tomar entonces la suma algebraica de los productos resultantes.

Antes de demostrar este teorema, ilustramos su significado refiriéndonos al determinante de cuarto orden del Ej. 1. El valor del determinante puede expresarse mediante

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

que es llamado el desarrollo con relación a los elementos de la primera fila. De manera semejante, el desarrollo de acuerdo a los elementos de la tercera columna es

$$a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$$

*Demostración.* Observamos primero que los términos de un determinante $D$ que tienen a $a_{11}$ como un factor están dados por $a_{11}A_{11}$, donde $A_{11}$ es el menor de $a_{11}$. Esto es verdad porque cada término de la expansión de $D$ tiene uno y sólo un factor de cada fila y cada columna y, en consecuencia, los términos de $D$ que involucran a $a_{11}$ no pueden tener otro factor de la primera fila y la primera columna. Ahora, si cada término de $A_{11}$ se multiplica por $a_{11}$, no se altera el número de inversiones de los subíndices de cualquier producto. Por tanto, el producto de $a_{11}$ y el desarrollo de $A_{11}$ son términos de $D$. Así, vemos que el producto del elemento de la primera fila y la primera columna con su menor da un resultado a todos los términos de $D$ que involucran a tal elemento.

Ahora consideramos el producto de un elemento y su menor si el elemento está en la $i$-ésima fila y la $j$-ésima columna. Este elemento $a_{ij}$ puede ser transferido a la primera fila y a la primera columna de la siguiente manera:

(a) Se trae primero la $i$-ésima para la primera fila mediante $i - 1$ intercambios de filas adyacentes.

(b) Se trae la $j$-ésima columna a la primera columna mediante $j - 1$ intercambios de columnas adyacentes.

Debe observarse que estos intercambios involucran filas o columnas adyacentes y, por tanto, no alteran al menor de $a_{ij}$. Además, cada intercambio invierte el signo del determinante. Puesto que el número total de intercambios es $i + j - 2$, el determinante final $D'$ y el determinante original están relacionados mediante la ecuación

$$D' = (-1)^{i+j-2}D = (-1)^{i+j}D$$

Concluimos, entonces, que los términos del desarrollo de $D$ con $a_{ij}$ como factor están dados por

$$a_{ij}(-1)^{i+j}A_{ij} = a_{ij}C_{ij}$$

donde $A_{ij}$ es el menor de $a_{ij}$ y $C_{ij}$ es el cofactor.

Recordamos que cada término del desarrollo de un determinante tiene como factor uno y sólo un elemento de cada fila y de cada columna. Por tanto, la suma de los productos obtenidos multiplicando cada elemento de cualquier fila (o columna) elegida por su cofactor resulta en todos los términos del desarrollo. Esto completa la demostración del teorema. ∎

Desarrollando por cofactores, podemos expresar un determinante de orden $n$ en términos de determinantes de orden $n - 1$. Cada uno de los determinantes resultantes puede ser expresado en términos de determinantes de orden $n - 2$. Continuando este proceso llegamos a determinantes de orden 2, cuyos desarrollos pueden escribirse con facilidad. Sin embargo, la evaluación de los determinantes puede facilitarse mucho empleando algunos teoremas establecidos en la Sec. 16-4. Un artificio particularmente útil es obtener un determinante cuyos elementos, excepto uno, de alguna fila o columna, sean nulos. Ilustraremos con ejemplos.

EJEMPLO 2. Evaluemos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

*Solución.* Obtengamos un determinante equivalente que tiene todos los elementos, excepto uno, de alguna fila o columna iguales a cero. El elemento $-1$ en la segunda fila, tercera columna, facilita nuestra tarea. Multiplicamos los elementos de la segunda fila por 4 y sumamos los productos a los elementos correspondientes de la primera fila. Seguidamente multiplicamos los elementos de la segunda fila por $-2$ y sumamos los productos a los elementos correspondien-

tes de la tercera fila. Estas operaciones no alteran el valor del determinante (Teorema 16-8) y, por tanto,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 17 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Aprovechando los elementos iguales a cero, desarrollamos el nuevo determinante de acuerdo con los elementos de la tercera columna y tenemos

$$D = 0 - (-1)\begin{vmatrix} 14 & 17 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 0 = 14(-4) - 1(17) = -73$$

Observemos que la suma de los números que corresponden a la posición de la fila y de la columna del elemento $-1$, dada por $2 + 3 = 5$, es impar. En consecuencia, el cofactor de este elemento es el negativo del menor.

EJEMPLO 3. Evaluar el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -12 & 7 & 5 \\ -4 & 6 & 4 & -3 \\ 10 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

*Solución.* Primero factorizamos dos de los elementos de la columna uno y tres de los elementos de la columna dos, obteniendo

$$D = 6\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Para obtener ceros adicionales en la tercera fila, multiplicamos los elementos de la tercera columna por 5 y sustraemos los productos de los elementos correspondientes de la primera columna, y después multiplicamos los elementos de la tercera columna por 2 y sustraemos los productos de los elementos correspondientes de la cuarta columna. Esto da el determinante

$$D = 6\begin{vmatrix} -34 & -4 & 7 & -9 \\ -22 & 2 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -22 & 3 & 5 & -10 \end{vmatrix}$$

Puesto que este determinante es distinto de cero, las tres ecuaciones tienen una solución; y ésta, como puede verificarse, es $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. Estos valores también satisfacen a la cuarta ecuación.

## 16-8. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS

Una ecuación lineal se dice *homogénea* si el término constante es cero. Las ecuaciones

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

constituyen un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Obviamente, las ecuaciones se satisfacen sustituyendo cero por cada incógnita. Esta solución puede también obtenerse usando determinantes si el de los coeficientes de las incógnitas $D$ no es igual a cero. Podemos escribir la solución como

$$x = \frac{N_x}{D}, \quad y = \frac{N_y}{D}, \quad z = \frac{N_z}{D}$$

$N_x$, $N_y$ y $N_z$ representan los determinantes como se definen en la Sec. 16-6. Cada uno de estos determinantes, que aparecen como numeradores, tiene una columna de ceros, y es, por tanto, igual a cero. Si, $D \neq 0$, ésta es la única solución posible.

Vemos de inmediato que cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneas se satisface por el valor cero de cada incógnita. A esto se le llama *solución trivial*. Planteemos ahora la pregunta de si existen soluciones distintas de la solución trivial. Con relación a esta pregunta enunciamos un teorema.

**Teorema 16-12.** Un sistema de $n$ ecuaciones lineales homogéneas en $n$ incógnitas tiene soluciones no triviales si y sólo si el determinante de los coeficientes es igual a cero.

Este teorema se demuestra en los libros de texto sobre teoría de ecuaciones. Aunque no incluimos una demostración, vamos a ilustrar un método para encontrar soluciones no triviales.

EJEMPLO. Encontremos soluciones no triviales del sistema

$$x - y - 3z = 0$$
$$2x - 2y - 6z = 0$$
$$2x + 3y - z = 0$$

*Solución.* Primero evaluamos $D$. Así encontramos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Puesto que $D = 0$, hay soluciones no triviales. Ahora encontramos las soluciones. Transponiendo los términos en $z$ en la segunda y tercera ecuaciones obtenemos

$$2x - 2y = 6z$$
$$2x + 3y = z$$

La solución de estas ecuaciones para $x$ y $y$ en términos de $z$ es $x = 2z$, $y = -z$. Estos valores para $x$ y $y$ satisfacen tres de las ecuaciones dadas. Así puede obtenerse un número indefinido de soluciones asignando simplemente cualquier valor a $z$ y usando los valores $2z$ y $-z$ para $x$ y $y$. Dando a $z$ el número literal $k$, escribimos la solución como

$$x = 2k, \quad y = -k, \quad z = k$$

donde $k$ puede ser cualquier número.

## *EJERCICIO 16-6*

Pruebe cada sistema de ecuaciones en cuanto a consistencia o inconsistencia. Encuentre la solución de cada sistema cuyas ecuaciones sean consistentes.

**1.** $4x - 3y = 3$, $2x - 3y = 2$, $2x - 6y = 3$

**2.** $4x - 2y = 3$, $2x - 3y = 2$, $6x - 5y = 4$

**3.** $3x - 3y = 4$, $2x + 2y = 3$, $7x + y = 10$

**4.** $x + 7y = 10$, $2x + 5y = 2$, $x + 16y = 28$

**5.** $2x + 3y = -1$, $3x - 4y = 24$, $x + 10y = -26$

**6.** $6x - 5y = 14$, $4x + 3y = -13$, $2x + y = 0$

**7.** $2x - y + 2z = 6$, $3x + y + z = 8$, $x - 2y + z = 0$, $x + y = 1$

**8.** $2x + y - z = 8$, $3x - 4y - 5z = 8$, $5x + y + z = 10$, $x + y + z = 2$

**9.** $x - y = 1$, $x + z = -6$, $y - z = 1$, $x + y - 2z = 3$

**10.** $2x + 3y + z = 9$, $x - 2y - 3z = 1$, $5x + 4y + 6z = 5$, $x + y - z = 6$

**11.** $x - 2y - z = 3$, $x + 3y + z = 4$, $x - y - 2z = 5$, $x + y + 2z = 6$

**12.** $2x - y + z = 0$, $2x + y - z = 2$, $2x - y - z = 3$, $2x + y + z = 4$

Pruebe cada sistema de ecuaciones en cuanto a existencia de soluciones no triviales Resuelva los sistemas que tienen soluciones no triviales.

**13.** $x + 2y = 0$, $2x - y = 0$

**14.** $3x - 2y = 0$, $6x - 4y = 0$

**15.** $3x + 3y = 0$, $2x + 2y = 0$

**16.** $x + y + z = 0$
$x - y - 5z = 0$
$x + 2y + 4z = 0$

**17.** $2x - 3y - z = 0$
$x + 3y - 2z = 0$
$x - 3y = 0$

**18.** $x + 2y - 5z = 0$
$x - y + 4z = 0$
$x + 4y - 9z = 0$

**19.** $x + y + z + w = 0$
$x - 7y + z - w = 0$
$x + y - 7z - w = 0$
$x - y + 3z + w = 0$

**20.** $4x - y - 2z + w = 0$
$x - y - z + w = 0$
$5x + y - z - w = 0$
$2x + 2y + 2z - 3w = 0$

## 16-9. ALGEBRA DE MATRICES

Denotamos una matriz de $m$ filas y $n$ columnas mediante el arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

que se llama una matriz $m$ por $n$. Si $m = n$, la matriz se llama *una matriz cuadrada de orden n.*

**Definición 16-5.** Dos matrices de las mismas dimensiones son iguales si todos los elementos correspondientes son iguales.

**Definición 16-6.** La suma de dos matrices de las mismas dimensiones es la matriz que se obtiene sumando cada elemento de una de ellas al elemento correspondiente de la otra matriz.

**Definición 16-7.** El producto de un número $k$ y una matriz es la matriz obtenida multiplicando cada elemento de la matriz dada por $k$.

EJEMPLO 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 & -3+3 \\ 4+6 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2.

$$(-3)\begin{bmatrix} 8 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & -21 & 6 & -3 \\ -6 & -15 & 24 & -27 \end{bmatrix}$$

**Definición 16-8.** Si $A$ es una matriz $m$ por $n$ y $B$ es una matriz $n$ por $p$, entonces el producto $AB$ es la matriz $m$ por $p$ $C(C = AB)$ cuyo elemento $c_{ij}$ en la $i$-ésima fila y $j$-ésima columna está dado por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

De acuerdo con esta definición, "multiplicamos" la $i$-ésima fila de $A$ por la $j$-ésima columna de $B$ para encontrar el elemento en la $i$-ésima fila y $j$-ésima columna del elemento $AB$. Por tanto, el número de columnas de $A$ debe ser igual al número de filas en $B$. Si esta condición no se cumple no será posible la multiplicación de matrices.

EJEMPLO 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -1 & -10 \\ 30 & 12 & 0 & 42 \\ 13 & -14 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

Los elementos $-7$, $2$, $-1$, $-10$ de la primera fila del producto de las dos matrices son

$$1\cdot 3 + (-2)5, \quad 1\cdot 6 + (-2)2, \quad 1(-1) + (-2)0, \quad 1\cdot 4 + (-2)7$$

Esto es, recorremos la primera fila de la primera matriz y sucesivamente la primera, segunda y tercera columnas de la segunda matriz para obtener los elementos de la primera fila del producto de las matrices. De manera semejante podemos usar la segunda y tercera filas de la matriz dada y columnas de la segunda matriz para encontrar la segunda y tercera filas del producto de las matrices.

Nótese que la primera matriz en este ejemplo tiene dimensiones 3 por 2 y la segunda 2 por 4, con lo que el número de columnas en la primera matriz iguala al número de filas en la segunda matriz. Sin embargo, si intercambiamos la posición de las matrices, la primera matriz tendría 4 columnas y la segunda 3 filas, con lo que el producto no estaría definido. Aunque los productos $AB$ y $BA$ de dos matrices existieran, los resultados podrían o no ser iguales. El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que la multiplicación matricial es, en general, no conmutativa.

EJEMPLO 4.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 2 + (-1)3 & 5\cdot 1 + (-1)4 \\ 6\cdot 2 + 7\cdot 3 & 6\cdot 1 - 7\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 33 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 5 + 1\cdot 6 & 2(-1) + 1\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 6 & 3(-1) - 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 39 & 25 \end{bmatrix}$$

## *EJERCICIO 16-7*

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

encuentre las matrices resultantes en las siguientes operaciones:

1. $A + B$
2. $B + A$
3. $A - B$
4. $2A + B$
5. $AB$
6. $BA$

Calcule los productos indicados.

7. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

demuestre que las siguientes ecuaciones son válidas.

15. $A + B = B + A$
16. $(A + B) + C = A + (B + C)$
17. $A(B + C) = AB + AC$
18. $A(B - C) = AB - AC$
19. $k(A + B) = kA + kB$
20. $(m + n)A = mA + nA$

## 16-10. LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Recordamos que todo número real $a$ tiene una identidad multiplicativa. Esto es, si $a \in R$, entonces $a \cdot 1 = a$ (Axioma 5, Sec. 2-2). Esto sugiere la idea de una matriz de identidad en la multiplicación de matrices Algunas matrices, como veremos, tienen identidad multiplicativa.

**Teorema 16-13.** Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$ y sea $I$ una matriz cuadrada también de orden $n$ cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás elementos igualan a cero. Se concluye entonces que

$$AI = A \quad \text{e} \quad IA = A$$

*Demostración* (para una matriz 3 por 3). Multiplicando, tenemos

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Si ahora $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$ (siendo $n$ cualquier entero positivo) e $I$ es la matriz correspondiente descrita, podemos multiplicar, como lo hemos hecho aquí, y encontramos que

$$AI = IA = A \quad \blacksquare$$

Recordamos también que cualquier número real $a$ diferente de cero tiene un inverso multiplicativo que se expresa mediante $a(1/a) = 1$. Esta propiedad es también válida para ciertas matrices.

**Definición 16-9.** Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$ e $I$ la matriz identidad correspondiente. Si existe una matriz cuadrada $A^{-1}$, también de orden $n$, tal que $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$, entonces $A^{-1}$ es llamada la *inversa multiplicativa de A*.

EJEMPLO 1. Determinemos si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

tiene una inversa.

*Solución.* Si escribimos.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

necesitamos encontrar los valores de las incógnitas $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$, en la ecuación

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación por la izquierda, tenemos

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & 2y_1 - y_2 \\ 4x_1 + 5x_2 & 4y_1 + 5y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que elementos correspondientes de matrices iguales son iguales, escribimos los dos sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1 - y_2 = 0 \\ 4y_1 + 5y_2 = 1 \end{cases}$$

Obervamos que la matriz de coeficientes de cada uno de estos sistemas es igual a la matriz dada $A$. El determinante de $A$ no es igual a cero, y, en consecuencia cada sistema es consistente. Las soluciones son $x_1 = 5/14$, $x_2 = -2/7$ y $y_1 = 1/14$, $y_2 = 1/7$. Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, invirtiendo el orden de la multiplicación, encontramos

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, concluimos que la matriz dada sí posee una matriz inversa.

En seguida estableceremos un teorema que nos permita construir la matriz inversa a una matriz 3 por 3.

**Teorema 16-14.** Escribiendo

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

una matriz 3 por 3 cuyo determinante $D$ es diferente de cero, demostraremos que la matriz inversa existe y está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

donde $A_1$ es el cofactor de $a_1$ en el determinante de $A$, $B_1$ el cofactor de $b_1$, $C_1$ el cofactor de $c_1$, y de manera similar para los elementos de la segunda y tercera columnas de $A^{-1}$.

*Demostración.* Para encontrar el inverso de $A$ necesitamos resolver la ecuación

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

para los elementos en la segunda matriz de lado izquierdo. Multiplicando expresamos el lado izquierdo de la ecuación en la forma

$$\begin{bmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 & a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, para que la Ec. (2) se satisfaga, los elementos de esta matriz deben ser iguales a los elementos correspondientes en el lado derecho de la ecuación. Igualando los elementos de las primeras columnas, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene una solución porque el determinante de la matriz de coeficientes no es igual a cero. Aplicando la regla de Cramer, tenemos

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{A_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{B_1}{D}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{C_1}{D}$$

De manera similar, encontramos

$$y_1 = \frac{A_2}{D}, \qquad y_2 = \frac{B_2}{D}, \qquad y_3 = \frac{C_2}{D}$$

y

$$z_1 = \frac{A_3}{D}, \qquad z_2 = \frac{B_3}{D}, \qquad z_3 = \frac{C_3}{D}$$

Estos valores para las incógnitas de la Ec. (2) son los contenidos en la Ec. (1) y, en consecuencia, tenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{D} & \frac{A_2}{D} & \frac{A_3}{D} \\ \frac{B_1}{D} & \frac{B_2}{D} & \frac{B_3}{D} \\ \frac{C_1}{D} & \frac{C_2}{D} & \frac{C_3}{D} \end{bmatrix}$$

Para completar la demostración del teorema, necesitamos demostrar que $A^{-1}A = I$. Esto puede hacerse examinando los elementos del producto $A^{-1}A$. Dejamos esta parte para el estudiante y haremos simplemente algunas observaciones.

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = D$$

que es el determinante de la matriz $A$, y

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$$

porque es el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

que tiene dos columnas idénticas. ■

Notamos que la matriz de coeficientes de cada uno de los sistemas de ecuaciones que se obtienen de la Ec. (2) es el de la matriz A. Cada sistema, entonces, tiene una solución única puesto que el determinante de $A$ no es igual a cero. Si el determinante de $A$ fuese igual a cero, ninguno de los sistemas tendría una solución. En este caso $A$ no tendría inverso. Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente teorema para una matriz 3 por 3. El teorema, sin embargo, es válido en general.

**Teorema 16-15.** Una matriz cuadrada cuyo determinante no es igual a cero tiene un inverso. Una matriz cuadrada cuyo determinante es igual a cero no tiene inverso.

EJEMPLO 2. Encontremos el inverso de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Para aplicar el Teorema 16-14, necesitamos encontrar el valor del determinante $D$ de $A$ y el cofactor de cada elemento de $D$. Calculando encontramos que el valor de $D$ es 21, lo que nos asegura la existencia de la inversa de $A$. En cuanto a los cofactores necesarios tenemos

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -4, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 23, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -6, \quad B_2 = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad B_3 = -\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -7, \quad C_2 = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 14, \quad C_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De estos valores obtenemos

$$A^{-1} = \tfrac{1}{21}\begin{bmatrix} -4 & 23 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ -7 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

## *EJERCICIO 16-8*

1. Use el método del Teorema 16-14 y demuestre que si

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \qquad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}$$

2. **Si** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ **y** $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

encuentre $AB$. ¿Es $B$ la inversa multiplicativa de $A$?

Encuentre la inversa, si existe, de cada una de las siguientes matrices. Verifique su resultado en la fórmula $AA^{-1} = I$.

3. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

**9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

**10.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

**11.** $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

**12.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

**13.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

**14.** $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

**15.** $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

**16.** $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

**17.** $\begin{bmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 23 & 3 & 14 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

# Capítulo 17

# LOGARITMOS

## 17-1. LA FUNCION LOGARITMICA

Los logaritmos son de mucho valor en matemáticas. Usándolos es posible hacer con sorprendente sencillez un gran número de cálculos numéricos. Y aparte de su utilidad en este aspecto, los logaritmos se usan con gran ventaja en el cálculo diferencial e integral y otras áreas de las matemáticas.

**Definición 17-1.** Si $a$ es un número positivo distinto de 1 y $y$ es un número real en la ecuación $a^y = x$, entonces $y$ es llamado el *logaritmo* de $x$ en la base $a$. Esto es, el logaritmo de un número $x$ es el exponente al que hay que elevar la base $a$ para obtener el valor $x$.

Escribimos $y = \log_a x$ en vez de la forma no abreviada, $y$ es el logaritmo de $x$ en la base $a$. Por tanto, las ecuaciones

$$a^y = x \quad \text{y} \quad y = \log_a x$$

expresan la misma relación entre los números $a$, $y$ y $x$. La primera ecuación está en *forma exponencial* y la segunda en *forma logarítmica*.

En la definición de un logaritmo especificamos que la base $a > 0$ y que el exponente $y$ es un número real (positivo, negativo o cero). En consecuencia, $a^y$ es un número positivo; por tanto, debemos considerar logaritmos de números positivos solamente. Suponemos (pero no demostramos) que si $a$ y $x$ son cualesquier números positivos excepto $a = 1$, entonces hay uno y sólo un valor real de $y$ que satisfará la ecuación $a^y = x$. Esto es, cada número positivo tiene un logaritmo único con respecto a una base dada. Desechamos a la unidad como base, puesto que 1 elevado a cualquier potencia sigue siendo 1.

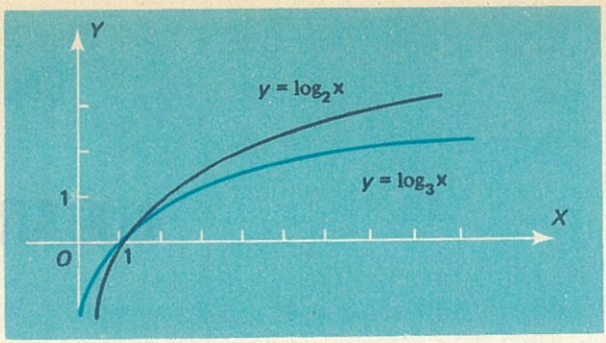



*Figura 17-1*

Puesto que un número positivo tiene un único logaritmo, la ecuación $y = \log_a x$ define una función cuyo dominio es el conjunto de los números positivos y cuyo rango es el conjunto de los números reales. Así, la función consiste en el conjunto de parejas de números

$$\{(x, \log_a x) | x > 0\}$$

Supongamos que se elige $a - 3$ y construimos la gráfica de la ecuación $y = \log_3 x$. Usamos la ecuación equivalente $x = 3^y$, asignamos valores enteros a $y$, y obtenemos los valores correspondientes de $x$ como se muestran en la siguiente tabla.

| $x$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |

La gráfica (Fig. 17-1) se muestra junto con la gráfica de $y = \log_2 x$. Comparativamente, observamos que $|\log_3 x| < |\log_2 x|$, excepto en $x = 1$. Ambas gráficas cruzan el eje $x$ en $x = 1$, lo cual es cierto para cualquier base $a$ puesto que $a^0 = 1$.

Como ilustraciones adicionales del significado de los logaritmos, damos una breve lista de ecuaciones logarítmicas y sus correspondientes y equivalentes ecuaciones exponenciales.

| FORMA LOGARITMICA | FORMA EXPONENCIAL |
|---|---|
| $\log_2 8 = 3$ | $2^3 = 8$ |
| $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ | $9^{3/2} = 27$ |
| $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ | $5^{-2} = \frac{1}{25}$ |
| $\log_a a = 1$ | $a^1 = a$ |

EJEMPLO 1. Encontremos $x$ si $\log_5 x = -4$.

*Solución.* Usando la forma exponencial equivalente, tenemos

$$x = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$$

EJEMPLO 2. Encontremos $a$ si $\log_a 36 = \frac{2}{3}$.

*Solución.* La forma exponencial es $a^{2/3} = 36$. Tomamos la potencia $\frac{3}{2}$ de ambos miembros de esta ecuación y obtenemos

$$(a^{2/3})^{3/2} = 36^{3/2} \quad \text{y} \quad a = 216$$

EJEMPLO 3. Encontremos el valor de $\log_7 \frac{1}{49}$.

*Solución.* Escribiendo $y = \log_7 \frac{1}{49}$. Entonces, cambiando a la forma exponencial, obtenemos

$$7^y = \tfrac{1}{49} = 7^{-2} \quad \text{y} \quad y = -2$$

## *EJERCICIO 17-1*

Dé la forma logarítmica de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $2^3 = 8$
2. $3^4 = 81$
3. $5^{-1} = \frac{1}{5}$
4. $7^1 = 7$
5. $6^0 = 1$
6. $8^{2/3} = 4$
7. $9^{-3/2} = \frac{1}{27}$
8. $32^{1/5} = 2$
9. $10^3 = 1000$
10. $(\frac{3}{2})^{-2} = \frac{4}{9}$
11. $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$
12. $(\frac{1}{25})^{-3/2} = 125$

Dé la forma exponencial de cada una de las siguientes ecuaciones.

13. $\log_4 1 = 0$
14. $\log_7 7 = 1$
15. $\log_6 36 = 2$
16. $\log_{10} 1 = 0$
17. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
18. $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$
19. $\log_2 \frac{1}{4} = -2$
20. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
21. $\log_{1/3} 27 = -3$
22. $\log_{.5} 125 = -3$
23. $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$
24. $\log_{1/6} 36 = -2$

Encuentre $x$, $a$ o $y$ en cada una de las siguientes ecuaciones.

25. $\log_{.0} x = 2$
26. $\log_2 x = 3$
27. $\log_9 x = -1$
28. $\log_4 x = -2$
29. $\log_8 x = \frac{2}{3}$
30. $\log_{16} x = \frac{3}{4}$
31. $\log_{25} x = -\frac{3}{2}$
32. $\log_{1/4} x = 0$
33. $\log_{1/2} x = -4$
34. $\log_a 16 = 2$
35. $\log_a 5 = 1$
36. $\log_a 8 = 3$
37. $\log_a 25 = \frac{1}{2}$
38. $\log_a 4 = -\frac{1}{2}$
39. $\log_a \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$
40. $\log_a 64 = -\frac{3}{2}$
41. $\log_a 36 = -2$
42. $\log_a 2 = -\frac{1}{8}$
43. $y = \log_{125} 25$
44. $y = \log_3 27$
45. $y = \log_{25} 5$
46. $y = \log_5 \frac{1}{125}$
47. $y = \log_{64} 16$
48. $y = \log_3 \frac{1}{81}$

## 17-2. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Vamos a demostrar y a probar tres propiedades de los logaritmos. Estas propiedades se obtienen fácilmente a partir de las leyes de exponentes.

**Teorema 17-1.** El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Esto es,

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

*Demostración.* Sea $\log_a M = x$ y $\log_a N = y$. Entonces $M = a^x$, $N = a^y$,

$$MN = a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \text{y} \quad \log_a MN = x + y$$

Sustituyendo por $x$ y $y$, obtenemos

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

Para un producto de tres factores, como $MNP$, tenemos

$$\begin{aligned} \log_a MNP &= \log_a (MN)(P) \\ &= \log_a MN + \log_a P \\ &= \log_a M + \log_a N + \log_a P \end{aligned}$$

De manera similar, el teorema puede extenderse a cualquier número de factores. ■

EJEMPLO 1. $\log_{10}(784)(92.7) = \log_{10} 784 + \log_{10} 92.7$.

**Teorema 17-2.** El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor. Esto es,

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

*Demostración.* Si $\log_a M = x$ y $\log_a N = y$, entonces $M = a^x$ y $N = a^y$. Por tanto,

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{y} \quad \log_a \frac{M}{N} = x - y$$

Sustituyendo para $x$ y $y$, obtenemos

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad ■$$

EJEMPLO 2. $\log_5 \frac{1078}{5234} = \log_5 1078 - \log_5 5234$.

**Teorema 17-3.** El logaritmo de una potencia de un número es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número. Esto es,

$$\log_a M^p = p \log_a M$$

*Demostración.* Esto es $\log_a M = x$, o $M = a^x$. Entonces

$$M^p = (a^x)^p = a^{px} \quad \text{y} \quad \log_a M^p = px.$$

Sustituyendo $x$ llegamos a

$$\log_a M^p = p \log_a M \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3. $\log_4 7842^3 = 3 \log_4 7842.$

EJEMPLO 4. $\log_{10} 597^{-5} = -5 \log_{10} 597.$

EJEMPLO 5. $\log_3 \sqrt{95} = \log_3 95^{1/2} = \frac{1}{2} \log_3 95.$

EJEMPLO 6. Expresemos $\log_2 \dfrac{28^2(6.7)^{1/2}}{(8.4)(17)}$ como la suma algebraica de logaritmos.

*Solución.* Usamos cada uno de los teoremas anteriores y escribimos

$$\log_2 \frac{28^2(6.7)^{1/2}}{(8.4)(17)} = \log_2 28^2(6.7)^{1/2} - \log_2 (8.4)(17)$$

$$= 2 \log_2 28 + \tfrac{1}{2} \log_2 6.7 - \log_2 8.4 - \log_2 17$$

EJEMPLO 7. Expresemos $\frac{2}{3} \log_6 5 - \log_6 18 - 3 \log_6 2 + \log_6 35$ como un logaritmo sencillo.

*Solución.* $\frac{2}{3} \log_6 5 - \log_6 18 - 3 \log_6 2 + \log_6 35$

$$= \tfrac{2}{3} \log_6 5 + \log_6 35 - (\log_6 18 + 3 \log_6 2)$$

$$= \log_6 5^{2/3} + \log_6 35 - (\log_6 18 + \log_6 2^3)$$

$$= \log_6 5^{2/3} \cdot 35 - \log_6 18 \cdot 2^3$$

$$= \log_6 \frac{5^{2/3} \cdot 35}{18 \cdot 2^3}$$

## *EJERCICIO 17-2*

Escriba cada una de las expresiones siguientes como la suma algebraica de logaritmos. No se indica la base. Puede usar cualquier número positivo, excepto el 1.

1. $\log (7.12)(78)^3$

2. $\log (473)(561)(852)$

3. $\log \dfrac{83}{(47)(51)}$

4. $\log \dfrac{(78)(85)}{69^{2/3}}$

5. $\log \dfrac{(1.44)^{1/2}(8.23)^2}{308}$

6. $\log \dfrac{(33)(14)}{(61)(28)}$

7. $\log \sqrt{\dfrac{(28)(44)(21)}{978}}$

8. $\log \dfrac{\sqrt{57} \cdot \sqrt[3]{91}}{(18.4)^4}$

9. $\log \dfrac{85\sqrt[3]{67}}{(43)\sqrt[2]{65}}$

10. $\log \sqrt{\dfrac{(84)(61)}{37}}$

Dado que $\log_{10} 2 = 0.3010$ y $\log_{10} 3 = 0.4771$, encuentre el valor de cada una de las siguientes cantidades.

**11.** $\log_{10} 9$ **12.** $\log_{10} 8$ **13.** $\log_{10} 6$
**14.** $\log_{10} 54$ **15.** $\log_{10} 48$ **16.** $\log \sqrt[3]{12}$
**17.** $\log_{10} \frac{27}{8}$ **18.** $\log_{10} \frac{16}{3}$ **19.** $\log_{10} \sqrt[4]{48}$
**20.** $\log_{10} 144$ **21.** $\log_{10} 81$ **22.** $\log_{10} 32$

## 17-3. LOGARITMOS COMUNES

Hay dos sistemas de logaritmos que se usan ampliamente en matemáticas. En uno de éstos la base es un número irracional, designado por $e$, cuyo valor es aproximadamente 2.718. Logaritmos en esta base son llamados *naturales*, o *neperianos*. Este sistema es conveniente en muchas consideraciones teóricas y usado en matemáticas superiores y en el cálculo. El otro sistema emplea al número 10 como base. Logaritmos en la base 10 son llamados *logaritmos comunes*, o de *Briggs*. Los logaritmos comunes son muy adecuados en los cálculos.

Nos vamos a interesar en logaritmos en la base 10 y, por tanto, por brevedad, esta base no se indicará en las expresiones logarítmicas. Así escribimos $\log_{10} N$ simplemente como $\log N$.

Los logaritmos comunes de las potencias enteras de 10, son enteros. Esto se ilustra en la siguiente lista de potencias de 10 y sus logaritmos.

$$\begin{aligned} 10^3 &= 1000 & \log 1000 &= 3 \\ 10^2 &= 100 & \log 100 &= 2 \\ 10^1 &= 10 & \log 10 &= 1 \\ 10^0 &= 1 & \log 1 &= 0 \\ 10^{-1} &= 0.1 & \log 0.1 &= -1 \\ 10^{-2} &= 0.01 & \log 0.01 &= -2 \\ 10^{-3} &= 0.001 & \log 0.001 &= -3 \end{aligned}$$

Observando que $\log 1 = 0$, podemos concluir que números mayores que 1 tienen logaritmos positivos y que números entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos. Aún más, puesto que el logaritmo de una potencia entera de 10 es un entero, concluimos que los logaritmos de otros números positivos no son enteros. Por ejemplo, 63 está entre 10 y $10^2$ y, por tanto, su logaritmo está entre 1 y 2, o bien, es igual a 1 más una fracción (dicha fracción es mayor que 0 y menor que 1). En general, entonces, un logaritmo consiste en dos partes, un entero y una fracción.

## 17-4. CARACTERISTICA Y MANTISA

Cuando un logaritmo se expresa como un entero sumado a un decimal (entre 0 y 1), el entero es llamado la *característica* y el decimal es llamado la *mantisa*. En consecuencia, encontrar el logaritmo de un número requiere determinar tanto la característica como la mantisa. Vamos a considerar en primer lugar el problema de encontrar la característica. Puesto que log 1 = 0 y log 10 = 1, suponemos (lo que parece razonable) que el logaritmo de un número entre 1 y 10 es igual a cero más una fracción propia positiva. Para determinar la característica de números comprendidos entre 0 y 1 y números mayores que 10, introducimos la idea de la *posición de referencia* del punto decimal.

**Definición 17-2.** La posición de referencia del punto decimal viene inmediatamente después del primer dígito no nulo.

La flecha indica la posición de referencia del punto decimal de cada uno de los siguientes números.

$$\begin{array}{cccc} 3.741 & 578.3 & 0.456 & 0.000125 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

Los puntos decimales de estos números están, respectivamente, en la posición de referencia, dos lugares a la derecha de la posición de referencia, un lugar a la izquierda, y cuatro lugares a la izquierda de la posición de referencia.

Un número que es igual al producto de dos factores tales que el punto decimal de un factor está en la posición de referencia y el otro factor es una potencia entera de 10 se dice que está expresado en *notación científica*. Así, los números 4832, 0.004832, y 100 se expresan en notación científica de la manera siguiente

$$4832 = 4.832 \times 10^3$$

$$0.004832 = 4.832 \times 10^{-3}$$

$$100 = 1.00 \times 10^2$$

Como estas ilustraciones lo indican, un factor de un número en notación científica es igual a, o mayor que, 1 y menor que 10. El exponente de 10 en el otro factor es igual a más o menos el número de lugares que hay entre el punto decimal y la posición de referencia del mismo. El exponente es positivo si el punto decimal está a la derecha de la posición de referencia y negativo si el punto decimal está a la izquierda.

Empleando los Teoremas 17-1 y 17-3, tenemos

$$\log 4832 = \log (4.832 \times 10^3) = 3 + \log 4.832$$

$$\log 0.004832 = \log (4.832 \times 10^{-3}) = -3 + \log 4.832$$

$$\log 100 = \log (1.00 \times 10^{2}) = 2 + \log 1$$

Así, vemos que la característica del logaritmo de cada uno de los números es el exponente de 10 cuando el número es expresado en notación científica.

Consideramos ahora el caso general en que el número $A$ está expresado en notación científica como $A = B \times 10^n$, donde $1 \leq B < 10$ y $n$ es un entero. Tomando el logaritmo de cada miembro, escribimos

$$\log A = \log (B \times 10^n) = \log B + n$$

La mantisa de $\log A$ es $\log B$ puesto que $0 \leq \log B < 1$, y la característica es el entero $n$. Si $A$ es mayor que 10, la característica es un entero positivo; si $A$ está entre 0 y 1, la característica es un entero negativo.

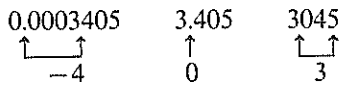
Notamos también que la característica del logaritmo de un número depende solamente de la localización del punto decimal. Es más, para determinar la característica será suficiente ver qué exponente debería tener 10 si el punto estuviese expresado en notación científica. La mantisa, sin embargo, es independiente de la posición del punto decimal; depende solamente de la sucesión de los dígitos en el número. De acuerdo con esto, enunciamos el siguiente.

**Teorema 17-4.** Si el punto decimal de un número está en la posición de referencia, la característica de su logaritmo es cero. Si el punto decimal está $n$ lugares a la derecha de la posición de referencia, la característica es $n$. Si el punto decimal está $n$ lugares a la izquierda de la posición de referencia, la característica es $-n$.

La mantisa es independiente de la posición del punto decimal.

EJEMPLO 1. Encontremos la característica del logaritmo de cada uno de los números 0.0003405, 3.405 y 3405.

*Solución.* Contamos el número de lugares que hay entre el punto decimal y la posición de referencia en cada caso. Así, encontramos que las características son, respectivamente, $-4$, 0 y 3.




EJEMPLO 2. Dado que $\log 5.826 = 0.7654$, escribamos los logaritmos de 582.6, 58260 y 0.05826.

*Solución.* Las mantisas de los logaritmos de estos números son todas iguales a la mantisa que se da. En relación a la posición de referencia, los puntos decimales de 582.6, 58260 y 0.05826 son, respectivamente, 2 lugares a la derecha, 4 lugares a la derecha y 2 lugares a la izquierda. Por tanto, las características buscadas son 2, 4 y $-2$; y tenemos

$$\log 582.6 = 2.7654,$$

$$\log 58260 = 4.7654$$

$$\log 0.05826 = -2 + 0.7654$$

Hemos notado que el logaritmo de un número entre 0 y 1 es negativo. Esto es, la característica es un entero negativo y la mantisa cero o una fracción positiva. La característica puede combinarse con la mantisa para dar una cantidad negativa simple. Por ejemplo,

$$\log 0.05826 = -2 + 0.7654 = -1.2346$$

Para la mayoría de los cálculos, sin embargo, es preferible expresar un logaritmo con parte fraccionaria positiva.

El logaritmo $-2 + 0.7654$ no podría escribirse como $-2.7654$, puesto que esto indicaría que la parte fraccionaria es también negativa. Una característica negativa se expresa generalmente como la diferencia de dos enteros. Así, puesto que $-2 = 2 - 4$ y además igual a $8 - 10$, tenemos

$$\begin{aligned}\log 0.05826 &= -2 + 0.7654 \\ &= 2.7654 - 4 \\ &= 8.7654 - 10\end{aligned}$$

Una característica negativa puede escribirse, obviamente, de una infinidad de maneras como diferencia de dos enteros. Sin embargo, la práctica común es escribir un entero positivo menos 10 o menos un múltiplo entero de 10.

## *EJERCICIO 17-3*

Escriba la característica del logaritmo de cada uno de los números siguientes.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** 38 | **2.** 50 | **3.** 824.3 |
| **4.** 7935 | **5.** 400.1 | **6.** 43780 |
| **7.** 0.923 | **8.** 0.0372 | **9.** 0.00347 |
| **10.** 0.0006 | **11.** 0.00008 | **12.** 1.800 |
| **13.** $6.43 \times 10^{3}$ | **14.** $2.78 \times 10^{-2}$ | **15.** $7.85 \times 10^{-5}$ |

Dado que log 86.34 = 1.9362, encuentre los números que tienen los siguientes logaritmos.

| | | |
|---|---|---|
| **16.** 2.9362 | **17.** 0.9362 | **18.** 3.9362 |
| **19.** 8.9362 − 10 | **20.** 9.9362 − 10 | **21.** 5.9362 |
| **22.** 4.9362 | **23.** 18.9362 − 20 | **24.** 27.9362 − 30 |
| **25.** 6.9362 − 10 | **26.** 5.9362 − 10 | **27.** 16.9362 − 20 |

## 17-5. TABLAS DE LOGARITMOS

Hemos visto cómo determinar inmediatamente la característica del logaritmo de un número. Encontrar mantisas, sin embargo, no es sencillo, pero se desarrollan métodos en matemáticas más avanzadas que permiten calcular la mantisa hasta el número de decimales requeridos. Las mantisas correspondientes a muchos números han sido calculadas y tabuladas. Una tabla así formada se llama *tabla de logaritmos* o *tabla de mantisas*. Puesto que la mayoría de las mantisas son fracciones decimales infinitas, sus valores se aproximan hasta dos, tres, cuatro o más lugares decimales. De acuerdo con esto, una tabla se llama a *dos lugares* decimales, a *tres lugares* y así sucesivamente, de acuerdo con el número de decimales que se usan.

Una tabla a cuatro lugares puede verse en las Págs. 379-382. Esta tabla da las mantisas de los números entre 1.00 y 9.99 en pasos de 0.01 de una unidad. La primera columna titulada $N$, contiene los primeros dos dígitos de un número y el tercer dígito está a la derecha en la primera línea de la página. La mantisa correspondiente a un número está en la línea horizontal correspondiente a los primeros dígitos de un número y en la columna cuya parte superior exhibe al tercer dígito del número. Como es costumbre, se omiten los puntos decimales en la tabla. Un punto decimal deberá ir enfrente de cada mantisa. Puesto que la característica de los números uno y mayores que uno, pero menores que 10, es cero, la tabla nos da los logaritmos de todos los números entre 1.00 y 9.99. Al usar la tabla para un número positivo de este rango, es necesario suplir la característica no nula de acuerdo con la discusión de la Sec. 17-4. Explicaremos, con ejemplos, el uso de la tabla para encontrar logaritmos de números y para encontrar números que corresponden a logaritmos dados.

El número que corresponde a un logaritmo es llamado el *antilogaritmo* (escrito "antilog"). Esto es, si $\log N = x$, entonces $N = \text{antilog } x$.

EJEMPLO 1. Encontremos log 4.58.

*Solución.* Fijemos la primera columna de la tabla de logaritmos que exhibe $N$ en la parte superior. Recorramos con la vista la columna hasta 45, que son los dos primeros dígitos de 4.58. Veamos ahora a lo largo de la línea horizontal desde 45, deteniéndose en la columna que tiene 8 en la parte superior, que es el tercer dígito de 4.58. Hemos llegado así a la mantisa .6609. Por tanto,

$$\log 4.58 = 0.6609$$

EJEMPLO 2. Encontremos log 0.00246.

*Solución.* El punto decimal está tres lugares a la izquierda de la posición de referencia y esto hace a la característica igual a $-3$. Aunque la característica se determina por la posición del punto decimal, la mantisa es independiente de aquél. Por tanto, los números 0.00246 y 246 tienen la misma mantisa. Ahora encontramos la mantisa correspondiente a 246. En la primera columna, localice 24, que son los dos primeros dígitos de 246. Recorra luego la línea horizontal, a partir de 24, deteniéndose en la columna que tiene 6 en la parte superior, que es el tercer dígito de 246. La mantisa .3909 es la que localizamos de esta manera. Por tanto,

$$\log 0.00246 = 7.3909 - 10$$

EJEMPLO 3. Encontremos log 87 000.

*Solución.* Puesto que el punto decimal está a cuatro lugares a la derecha de la posición de referencia, la característica es 4. La mantisa puede localizarse recorriendo el renglón correspondiente a 87, hasta la columna que empieza con 0. La mantisa es .9395. Por tanto,

$$\log 87\,000 = 4.9395$$

EJEMPLO 4. Encontremos antilog 3.6284.

*Solución.* Aquí tenemos el logaritmo y queremos encontrar el número correspondiente, o antilogaritmo. Puesto que la tabla tiene tan sólo mantisas de los logaritmos, nos olvidamos de la característica dada por el momento y buscamos en las columnas de mantisas el número 6284. Las mantisas crecen hacia la derecha a lo largo de cada renglón y de renglón en renglón. Es, por tanto, fácil localizar cualquier mantisa que aparezca en la tabla. Habiendo encontrado 6284, recorremos el renglón hacia la izquierda y encontramos 42 en la primera columna encabezada con $N$. El tercer dígito se encuentra en la parte superior de la columna que contiene a la mantisa dada y, en nuestro ejemplo, es 5. Así, la sucesión de dígitos en 526 corresponde a la mantisa .6284. Para colocar el punto decimal, notamos que la característica dada es 3; en consecuencia, el punto

debe estar tres lugares a la derecha del punto de referencia. Por tanto,

$$\text{antilog } 3.6284 = 4250$$

EJEMPLO 5. Si $\log N = 8.9741 - 10$, encontremos $N$.

*Solución.* Nuevamente tenemos el logaritmo y queremos encontrar el antilogaritmo. Primero localizamos 9 741 en una columna de mantisas. Después, a lo largo, del renglón llegamos a 94 en la primera columna de la página. A la mantisa dada corresponde el número 2 en la parte superior de la columna. Por tanto, $N$, excepto por el punto decimal, es 942. La característica dada es $8 - 10$, o $-2$ y, por tanto, el punto decimal está dos lugares a la izquierda de la posición de referencia. De acuerdo con esto, tenemos $N = 0.0942$.

### *EJERCICIO 17-4*

Encuentre el logaritmo de cada uno de los números siguientes.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** 3.14 | **2.** 57.2 | **3.** 4310 |
| **4.** 57,600 | **5.** 9.09 | **6.** 0.821 |
| **7.** 0.008 | **8.** 0.058 | **9.** 0.005 |
| **10.** 760 | **11.** 900 | **12.** 0.000087 |
| **13.** 0.39 | **14.** 576,000 | **15.** 0.0802 |

Encuentre el antilogaritmo de cada uno de los logaritmos siguientes.

| | | |
|---|---|---|
| **16.** 1.1347 | **17.** 2.4900 | **18.** 3.6064 |
| **19.** 0.9708 | **20.** 4.7324 | **21.** 0.8927 |
| **22.** 9.6767 − 10 | **23.** 8.6513 − 10 | **24.** 7.0414 − 10 |
| **25.** 6.8476 − 10 | **26.** 0.0043 | **27.** 9.4843 − 10 |
| **28.** 3.000 | **29.** 1.9996 | **30.** 7.8692 − 10 |

## 17-6. INTERPOLACION

La determinación de logaritmos y antilogaritmos en la sección precedente requirió tan sólo lectura directa en una tabla. Esto se debe a que nos ocupamos solamente de logaritmos con tres o menos dígitos (ceros a la derecha y a la izquierda no cuentan); de modo que para cada logaritmo la mantisa aparecía en la tabla. Determinar el logaritmo de un número de cuatro dígitos no es tan sencillo. También cualquier mantisa que no aparezca en la tabla presenta cierta dificultad. Sin embargo, estos casos pueden ser tratados por el proceso de *interpolación*. De acuerdo con este proceso, $\log N$ y $N$ son directamente proporcionales para pequeños cambios en $N$. aunque esta suposición no es enteramente válida, se puede mejorar la aproximación con la interpolación.

En el proceso de interpolación tendremos ocasión de *redondear* números, esto es, descartar dígitos extra. En cada caso el nuevo número será una aproximación del número dado.

EJEMPLOS. Redondeando 2.718 a tres dígitos tenemos 2.72. Sumamos 1 al tercer dígito del número dado para obtener la mejor aproximación de tres dígitos. Para aproximaciones de 2 dígitos y 1 redondeamos, respectivamente, a 2.7 y a 3.

Tratándose de redondear a 2.715 a tres dígitos, vemos que 2.71 y 2.72 son aproximaciones igualmente buenas. En cualquier caso análogo vamos a *redondear de modo que el último dígito sea número par*. Siguiendo esta regla elegimos en este caso 2.72.

EJEMPLO 1. Encontremos log 2047.

*Solución.* El número 2047 está a una distancia de 0.7 en el intervalo de 2040 a 2050. Las mantisas correspondientes a 2040 y 2050 son las mismas que para 204 y 205 y podemos leerlas directamente en la tabla. Estas mantisas son 3096 y 3118, excepto en cuanto a los puntos decimales. Para obtener un número que esté a una distancia 0.7 de la distancia entre el menor y el mayor de estos números, hacemos la multiplicación 0.7 (3118 − 3096). Nuestra respuesta es 15, aproximada hasta enteros y, por tanto, 3096 + 15 = 3111 es la mantisa requerida. Las cantidades involucradas en este proceso de interpolación se tabulan a continuación para ayudar al lector en la comprensión de los pasos seguidos.

| NUMERO | | MANTISA | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 7 | 2040 | 3096 | $0.7 \times 22 = 15.4$ |
| | | 2047 | ? | $= 15$, redondeado |
| | | 2050 | 3118 | $3096 + 15 = 3111$ |

Puesto que la característica requerida es 3, tenemos

$$\log 2047 = 3.3111$$

EJEMPLO 2 Encontremos log 0.07542.

*Solución.* La característica es −2, u 8 − 10. Para encontrar la mantisa, recordamos que esta parte del logaritmo de un número es independiente de la localización del punto decimal. Por tanto, encontramos la mantisa correspondiente a los dígitos 7542. Las cantidades involucradas se colocan aquí en forma tabulada.

| NUMERO | | MANTISA | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | 7540 | 8774 | $0.2 \times 5 = 1.0$ |
| | | 7542 | ? | |
| | | 7550 | 8779 | $8774 + 1 = 8775$ |

Vemos que 7542 está a 0.2 de la distancia entre 7540 y 7550; y queremos, por tanto, encontrar el número que está a la derecha de 8774 y a una distancia que es 0.2 de la distancia que hay entre 8774 y 8779. De 8774 a 8779 hay 5 unidades, y 0.2 de 5 es 1. Por tanto, $8774 + 1 = 8775$ y

$$\log\ 0.07542 = 8.8775 - 10$$

El estudiante que empieza a aprender el método de interpolación probablemente necesitará tabular las cantidades en una manera semejante a la usada en los ejemplos precedentes. Sin embargo, habiendo hecho algunos problemas, notará que casi todas, si no es que todas, las operaciones pueden hacerse mentalmente. Como se ve en los ejemplos, para encontrar la mantisa se requieren tres operaciones.

1. Se resta una mantisa de la mantisa que sigue inmediatamente en la tabla.
2. Esta diferencia se multiplica por un múltiplo entero de un décimo (0.1 hasta 0.9).
3. El producto, redondeado, se suma a la mantisa menor.

Estas operaciones pueden ser realizadas mentalmente en la mayoría de los casos.

Consideremos ahora el problema de encontrar el número que corresponde a un número dado cuya mantisa no aparece en la tabla. Este problema es el inverso del problema que se acaba de ejemplificar, pero el principio de interpolación es el mismo.

EJEMPLO 3. Dado que $\log N = 7.8126 - 10$, encontrar $N$.

*Solución.* La mantisa 8126 está entre dos mantisas consecutivas 8122 y 8129 y su posición está a $\frac{4}{7}$ del intervalo comprendido. Los números 6490 y 6500 corresponden a las dos mantisas consecutivas. Por tanto, encontramos el número que divide al intervalo 6490 a 6500 en la razón $\frac{4}{7}$. Esto da 6496 que, excepto en cuanto al punto decimal, es el antilogaritmo requerido. Colocamos el punto decimal de acuerdo con la característica que se nos da $7 - 10$ o $-3$, para obtener

$$N = \text{antilog}\ 7.8126 - 10 = 0.006496$$

Los números que aparecen en este ejemplo se presentan en forma tabulada como sigue.

| NUMERO | MANTISA | | |
|---|---|---|---|
| 6490 | 8122 | | $\frac{4}{7} \times 10 = 6$, redondeado |
| 10 ? | 8126 | 4 7 | $6490 + 6 = 6496$ |
| 6500 | 8129 | | $N = 0.006496$ |

Nuevamente el estudiante debe observar que, en la mayoría de los casos, los cálculos requeridos para encontrar antilogaritmos pueden hacerse mentalmente.

### *EJERCICIO 17-5*

Encuentre los logaritmos de los siguientes números.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** 68.25 | **2.** 7.831 | **3.** 585.3 |
| **4.** 0.9872 | **5.** 0.09864 | **6.** 0.004446 |
| **7.** 64.050 | **8.** 99.09 | **9.** 4.827 |
| **10.** 0.001118 | **11.** 0.01001 | **12.** 0.00007447 |
| **13.** 90490 | **14.** 10.51 | **15.** 234.8 |
| **16.** 0.8105 | **17.** 0.0003077 | **18.** 0.4805 |
| **19.** 1741 | **20.** 7621 | **21.** 7897 |
| **22.** 98,890 | **23.** 745,500 | **24.** 0.2604 |

Encuentre los antilogaritmos de los siguientes logaritmos.

| | | |
|---|---|---|
| **25.** 2.7743 | **26.** 0.8104 | **27.** 1.8063 |
| **28.** 3.0242 | **29.** 4.9985 | **30.** 0.6090 |
| **31.** 7.6621 − 10 | **32.** 8.4787 − 10 | **33.** 9.4885 − 10 |
| **34.** 9.1336 − 10 | **35.** 8.1731 − 10 | **36.** 6.3011 − 10 |
| **37.** 0.2330 | **38.** 1.2479 | **39.** 2.3182 |
| **40.** 3.3200 | **41.** 4.3346 | **42.** 5.2901 |
| **43.** 9.7375 − 10 | **44.** 8.6920 − 10 | **45.** 7.9511 − 10 |
| **46.** 8.0100 − 10 | **47.** 7.0350 − 10 | **48.** 9.6626 − 10 |

## 17-7. LOGARITMOS USADOS EN LOS CALCULOS

Estamos ahora preparados para calcular productos, potencias raíces o cualquier combinación de estas operaciones por medio de logaritmos. Los tres teoremas de la Sec. 17-2 se aplican con este propósito. Vamos a ilustrar el uso de ellos en algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Calculemos $N$ por medio de logaritmos, si

$$N = \frac{(32.41)(81.93)}{(1.854)(0.7949)}$$

*Solución.* Aplicando el Teorema 17-2, escribimos

$$\log N = \log (32.41)(81.93) - \log (1.854)(0.7949)$$

Y por el Teorema 17-1

$$\log N = \log 32.41 + \log 81.93 - (\log 1.854 + \log 0.7949)$$

Tratando de evitar errores y de acelerar el trabajo, el estudiante primero debe hacer un bosquejo en el cual se escriben las características de los números dados y se dejan espacios para las cantidades por determinar. Es decir que sugerimos un arreglo del tipo siguiente para nuestro problema:

| NUMERADOR | DENOMINADOR |
|---|---|
| $\log 32.41 = 1.$ | $\log 1.854 = 0.$ |
| $\log 81.93 = 1.$ | $\log 0.7949 = 9. \quad - 10$ |
| $\log \text{num} =$ | $\log \text{denom} =$ |
| $\log \text{denom} =$ | |
| $\log N =$ | |

Habiendo hecho este arreglo, se recurre a las tablas y se llenan los espacios. La forma completa será:

| | |
|---|---|
| $\log 32.41 = 1.5106$ | $\log 1.854 = 0.2681$ |
| $\log 81.93 = 1.9135$ | $\log 0.7949 = 9.9003 - 10$ |
| $\log \text{num} = 3.4241$ | $\log \text{denom} = 10.1684 - 10$ |
| $\log \text{denom} = 0.1684$ | $= 0.1684$ |
| $\log N = 3.2557$ | |
| $N = 1802$ | |

EJEMPLO 2. Calculemos $\sqrt[3]{321.4}/\sqrt{208.7}$.

*Solución.* Escribiendo $N$ en vez de la fracción dada, tenemos

$$N = \frac{\sqrt[3]{321.4}}{\sqrt{208.7}} = \frac{(321.4)^{1/3}}{(208.7)^{1/2}}$$

y

$$\log N = \tfrac{1}{3}\log 321.4 - \tfrac{1}{2}\log 208.7$$

$$\log 321.4 = 2.5071 \qquad \log 208.7 = 2.3195$$

$$\tfrac{1}{3}\log 321.4 = 0.8357 \qquad \tfrac{1}{2}\log 208.7 = 1.1598$$

El logaritmo del denominador es mayor que el logaritmo del numerador. Deseamos obtener la diferencia, o bien $\log N$, en la forma de un entero negativo más una fracción positiva (mantisa). Entonces se recurre a la tabla para encontrar $N$. Para obtener $\log N$ en esta forma más usual, primero expresamos la característica del logaritmo del numerador como $10 - 10$. Así escribimos

$$\tfrac{1}{3}\log 321.4 = 10.8357 - 10$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log 208.7 &= 1.1598 \\ \log N &= \overline{9.6759 - 10} \\ N &= 0.4741 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Calculemos $\sqrt[3]{0.8316}$.

*Solución.* Primero escribimos $N = \sqrt[3]{0.8316} = (0.8316)^{\frac{1}{3}}$. Entonces

$$\log N = \tfrac{1}{3}\log 0.8316$$

$$\log 0.8316 = 9.9199 - 10$$

Dividiendo $9.9199 - 10$ por 3, obtenemos el resultado, $3.3066 - 3.3333$, en forma indeseable. Una forma tratable se obtiene inmediatamente si la característica $9 - 10$ es reemplazada por la cantidad igual $29 - 30$. Así obtenemos

$$\log 0.8316 = 29.9199 - 30$$

$$\tfrac{1}{3}\log 0.8316 = 9.9733 - 10$$

$$N = 0.9404$$

### *EJERCICIO 17-6*

Emplee logaritmos para realizar las operaciones indicadas.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $(3.82)(61.2)$ | **2.** $(5.13)(0.837)$ | **3.** $(0.0081)(723)$ |
| **4.** $44.8 \div 81.3$ | **5.** $224 \div 68.7$ | **6.** $9.07 \div 75.6$ |
| **7.** $(5.01)(3.77)(9.12)$ | **8.** $(10.7)(8.16)(70.7)$ | **9.** $(771.3)(31.25)$ |
| **10.** $(90.92)(0.141)(6.683)$ | **11.** $(7.103)(23.09)(1.783)$ | **12.** $(12.36)(357.9)(0.167)$ |
| **13.** $\dfrac{(314)(671)}{(544)(837)}$ | **14.** $\dfrac{(7531)(3456)}{(1813)(1339)}$ | **15.** $\dfrac{(404)(505)}{(707)(114)}$ |
| **16.** $(2.718)^2$ | **17.** $(0.07184)^4$ | **18.** $(3.318)^3$ |
| **19.** $\sqrt[3]{75.66}$ | **20.** $\sqrt[3]{8.082}$ | **21.** $\sqrt{0.6118}$ |
| **22.** $\sqrt[4]{0.04623}$ | **23.** $\sqrt[4]{17.81}$ | **24.** $\sqrt[3]{66.78}$ |
| **25.** $(21.08)^{2/3}$ | **26.** $(0.1776)^{3/4}$ | **27.** $(1.414)^{3/5}$ |
| **28.** $(11.08)^{-4/3}$ | **29.** $(1881)^{-4/5}$ | **30.** $(1004)^{-5/2}$ |
| **31.** $\dfrac{\sqrt[3]{8143}}{\sqrt{5625}}$ | **32.** $\dfrac{\sqrt{1357}}{(5.634)^3}$ | **33.** $\sqrt{\dfrac{(57.81)(6.183)}{19.78}}$ |
| **34.** $\sqrt[3]{\dfrac{(4881)(2321)}{87.91}}$ | **35.** $\sqrt[4]{\dfrac{(19.03)(30.91)}{(1.456)(2.531)}}$ | **36.** $\dfrac{25.73\sqrt{5.183}}{\sqrt[3]{893.2}}$ |

## 17-8. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación en que la incógnita aparece en un exponente es llamada una *ecuación exponencial.* Algunas ecuaciones muy simples de

esta índole pueden resolverse por inspección. Otras se resuelven rápidamente usando logaritmos. Los siguientes ejemplos ilustran métodos para resolver ecuaciones exponenciales.

EJEMPLO 1. Resolvamos $5^x = 625^2$.

*Solución.* Exprese primero 625 como $5^4$, entonces $5^x = (5^4)^2 = 5^8$. Si las bases son las mismas, los exponentes deben ser los mismos; por tanto, $x = 8$.

EJEMPLO 2. Resolvamos $2^x = 29$.

*Solución.* Puesto que cantidades iguales tienen logaritmos iguales, podemos escribir

$$\log 2^x = \log 29$$

Por tanto,

$$x \log 2 = \log 29$$

y

$$x = \frac{\log 29}{\log 2} = \frac{1.4624}{0.3010} = 4.858$$

El valor de $x$ se obtiene dividiendo log 29 por log 2. Este es el cociente de dos logaritmos; no debe ser confundido con el logaritmo de un cociente.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación $5(3)^{2x+1} = 7^{1-x}$.

*Solución.* Tomando el logaritmo de cada miembro llegamos a

$$\log 5(3)^{2x+1} = \log 7^{1-x}$$

y

$$\log 5 + (2x + 1) \log 3 = (1 - x) \log 7$$

Esta es una ecuación lineal en $x$ y puede resolverse en la forma usual. Así

$$(2 \log 3 + \log 7)x = \log 7 - \log 5 - \log 3$$

y

$$x = \frac{\log 7 - \log 5 - \log 3}{2 \log 3 + \log 7} = \frac{-0.3310}{1.7993} = -0.1840$$

## *EJERCICIO 17-7*

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales sin usar las tablas.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $5^x = 125$ | **2.** $3^{x-1} = 9$ | **3.** $e^{2x} = e^{10}$ |
| **4.** $4^{x+2} = 16^x$ | **5.** $10^{3x-3} = 1000$ | **6.** $25^x = 5$ |
| **7.** $4^{2x+3} = 4$ | **8.** $6^x = \frac{1}{36}$ | **9.** $3^{2x} = 3^0$ |

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

**10.** $4^x = 7$
**11.** $9^x = 15$
**12.** $(1.27)^x = 2.73$
**13.** $9^x = 7$
**14.** $6^{2x-3} = 4$
**15.** $(8.13)^x = 68$
**16.** $4^x = 5^x$
**17.** $11^{2x-1} = 7^x$
**18.** $20^x = 4^x$
**19.** $100^x = 3^x$
**20.** $(0.3)^x = 0.5$
**21.** $(0.182)^x = 0.93$
**22.** $(0.718)^x = 1.07$
**23.** $3^x = 0.13$
**24.** $17^x = 0.19$
**25.** $6 \cdot 10^x = 11^x$
**26.** $9^x = 4 \cdot 19^{x+1}$
**27.** $5 \cdot 7^x = 6 \cdot 8^x$

## 17-9. LOGARITMOS DE UN NUMERO EN DIFERENTES BASES

Es a veces deseable expresar el logaritmo de un número que está en una base en términos de su logaritmo de otra base. En particular, el cambio de un logaritmo común a un logaritmo natural, o viceversa, resulta ventajoso en ciertos problemas de cálculo. Vamos a obtener una relación entre los logaritmos de un número en dos bases cualesquiera.

Sean $a$ y $b$ dos números positivos distintos de 1, y sea

$$\log_a N = x \quad \text{o} \quad N = a^x$$

Tomando el logaritmo en la base $b$ de ambos miembros de la ecuación exponencial, obtenemos

$$\log_b N = x \log_b a$$

y

$$x = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Puesto que $x = \log_a N$, obtenemos

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Esta fórmula puede usarse para cambiar de una base a otra. Sustituyendo la base natural $e$(2.718 aproximadamente) por $a$ y 10 por $b$, tenemos

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}$$

El valor de $\log_{10} e$ es 0.4343 hasta cuatro lugares decimales. Haciendo esta sustitución, obtenemos las relaciones

$$\log_{10} N = 0.4343 \log_e N$$

y

$$\log_e N = 2.3026 \log_{10} N$$

EJEMPLO 1. $\log_e 46 = 2.3026 \log_{10} 46 = (2.3026)(1.6628) = 3.829$.

EJEMPLO 2.

$$\log_4 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 4} = \frac{1.1761}{0.6021} = 1.953$$

### *EJERCICIO 17-8*

Encuentre los siguientes logaritmos.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $\log_e 100$ | **2.** $\log_e 158$ | **3.** $\log_e 0.478$ |
| **4.** $\log_2 54$ | **5.** $\log_3 175$ | **6.** $\log_4 204$ |
| **7.** $\log_2 0.416$ | **8.** $\log_5 0.067$ | **9.** $\log_7 62.4$ |
| **10.** $\log_{11} 150$ | **11.** $\log_e 0.041$ | **12.** $\log_{12} 247$ |
| **13.** $\log_8 9.85$ | **14.** $\log_9 0.009$ | **15.** $\log_e \sqrt{2}$ |

## 17-10. INTERES COMPUESTO

Supongamos que el interés que se paga por una cantidad de dinero, que llamaremos principal, en un periodo especificado de tiempo, se suma a la principal produciendo una nueva principal para un segundo periodo Si se repite este proceso durante $n$ periodos, decimos que la principal ha ganado un *interés compuesto* al cabo de estos $n$ periodos de interés. Los logaritmos, como veremos, son de utilidad en la solución de ciertos problemas de interés compuesto.

Denotemos, con $r$ (expresado decimalmente), a la tasa de interés anual correspondiente a $P$ dólares, a un interés compuesto por $n$ años. Al final del primer año la cantidad será

$$A_1 = P + Pr = P(1 + r)$$

Al final del segundo año la suma será

$$A_2 = P(1 + r) + Pr(1 + r) = P(1 + r)^2$$

Al final del tercer año se tendrá la suma

$$A_3 = P(1 + r)^2 + Pr(1 + r) = P(1 + r)^3$$

Continuando este proceso $n$ veces la cantidad $A$ será

$$A = P(1 + r)^n \qquad (1)$$

EJEMPLO 1. Si se invierten \$100.00 al 6% compuesto anualmente, ¿cuál será la cantidad acumulada al cabo de 4 años?

*Solución.* Haciendo la sustitución en la fórmula (1), se obtiene

$$A = 100(1 + .06)^4 = 100(1.06)^4$$
$$\log A = \log 100 + 4 \log (1.06)$$

$$\begin{aligned} \log 1.06 &= 0.0253 \\ 4 \log 1.06 &= 0.1012 \\ \log 100 &= 2.0000 \\ \log A &= 2.1012 \\ A &= \$126.25 \end{aligned}$$

Si el interés se compone $t$ veces en un año la tasa de interés para un periodo es $r/t$ en vez de $r$ y el número de periodos es $tn$. Para esta situación general la fórmula (1) viene a ser

$$A = P\left(1 + \frac{r}{t}\right)^{tn} \tag{2}$$

EJEMPLO 2. Si se invierten \$500.00 al 8% anual compuesto trimestralmente encuéntrese la cantidad acumulada al cabo de tres años.

*Solución*: Usamos la fórmula (2) con $r = .08$ y $t = 4$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} A &= 500\,(1.02)^{12} \\ \log A &= \log 500 + 12 \log (1.02) \\ \log 1.02 &= 0.0086 \\ 12 \log 1.02 &= 0.1032 \\ \log 500 &= 2.6990 \\ \log A &= 2.8022 \\ A &= \$634.10 \end{aligned}$$

## *EJERCICIO 17-9*

1. Encontrar la cantidad acumulada si se invierten \$200.00 por un periodo de cinco años al 6% anual compuesto (a) anualmente; (b) semestralmente.
2. Encontrar la cantidad acumulada si se invierten \$300.00 por un periodo de 7 años al 7% compuesto (a) anualmente; (b) semestralmente.
3. Encontrar la cantidad acumulada si se invierten \$400.00 por un periodo de 6 años al 6% anual compuesto (a) anualmente; (b) semestralmente; (c) trimestralmente.
4. ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de \$100 en valer \$215.80 si el interés se paga a una tasa del 8% anual compuesto anualmente? [Sugerencia: $215.80 = 100(1.08)^n$, $n = (\log 215.80 - \log 100) \div \log 1.08$.]
5. ¿En cuánto tiempo una inversión de 100 dólares valdrá \$179.60 a un interés compuesto anualmente del 5%.
6. En seis años cierta inversión de \$200 valdrá 300.20 con cierta tasa de interés compuesto anualmente. Encuentre esta tasa de interés. [Sugerencia: $300.20 = 200(1 + r)^6$. $\log (1 + r) = \log 300.20 - \log 200) \div 6$.]
7. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto anualmente según la cual una inversión de 6 dólares alcanzará el valor de \$229.20 en 17 años.

# Capítulo 18

# FRACCIONES PARCIALES

## 18-1. RESOLUCION DE FRACCIONES

En el Cap. 4 combinamos fracciones para obtener una sola fracción por medio del proceso de suma. Hay situaciones en matemáticas, particularmente en el cálculo, en donde es necesario realizar la operación inversa y expresar una fracción como la suma de fracciones más simples. Las fracciones resultantes por el método descrito más adelante, son llamadas *fracciones parciales.*

Consideraremos fracciones de la forma $p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Si el grado del numerador es menor al grado del denominador, la fracción es llamada *fracción propia.* De otra manera, la fracción es llamada *fracción impropia.* Claramente, una fracción impropia puede, por división, ser expresada como un polinomio o un polinomio más una fracción propia. Así, por ejemplo, el miembro izquierdo de la ecuación

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 10}{x^2 - 2x + 4} = 2x - 1 + \frac{-13x + 14}{x^2 - 2x + 4}$$

es una fracción impropia y el miembro derecho es un polinomio más una fracción propia.

En este capítulo nos restringiremos a la consideración de fracciones propias. Así, nuestro problema, entonces, será el expresar tales fracciones en términos de fracciones parciales. El proceso de encontrar fracciones parciales está basado en un teorema que se demuestra en álgebra avanzada. El teorema permite hacer las siguientes afirmaciones concernientes a una fracción propia en sus términos mínimos.

I. Correspondiendo a cada factor lineal $ax + b$ del denominador habrá una fracción parcial

$$\frac{A}{ax + b}$$

donde $A$ es una constante.

II. Correspondiendo a cada factor lineal repetido $(ax + b)^k$ del denominador habrá $k$ fracciones parciales

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son constantes y $A_k \neq 0$.

III. Si $ax^2 + bx + c$ es un factor del denominador, que no es producto de dos factores lineales, entonces correspondiendo a este factor cuadrático habrá una fracción parcial

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde $A$ y $B$ son constantes.

IV. Si $ax^2 + bx + c$ no es el producto de dos factores lineales, entonces correspondiendo al factor repetido $(ax^2 + bx + c)^k$ del denominador habrá $k$ fracciones parciales

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

donde $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$ son constantes con $A_k$ y $B_k$ no simultáneamente nulos.

Vamos a mostrar algunos ejemplos ilustrativos para cada uno de los cuatro tipos de factores mencionados en estas suposiciones.

## 18-2. FACTORES LINEALES DISTINTOS

Primero ilustraremos el caso en que los factores del denominador son lineales y no repetidos.

EJEMPLO. Separemos $\dfrac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)}$ en fracciones parciales.

*Solución por sustitución.* De acuerdo con el punto número 1 las fracciones parciales tienen denominadores $x - 1$, $x + 2$, $2x - 1$ y sus numeradores son constantes. Por tanto, escribimos

$$\frac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{2x - 1} \qquad (1)$$

Las constantes $A$, $B$ y $C$ se han de determinar de modo que esta ecuación sea una identidad. Para facilitar su determinación eliminamos fracciones de la Ec. (1) y tenemos

$$x^2 + 23x - 18 = A(x + 2)(2x - 1) + B(x - 1)(2x - 1) + C(x - 1)(x + 2) \qquad (2)$$

Esta ecuación, también una identidad, debe ser válida para cualquier valor que se asigne a $x$. Los valores más convenientes son 1, $-2$ y ½. Las constantes se encuentran rápidamente sustituyendo cada uno de estos valores a su vez en la Ec. (2).

$$\text{Para } x = 1: \quad 1 + 23 - 18 = A(3)(1) \quad \text{y} \quad A = 2$$

$$\text{Para } x = -2: \quad 4 - 46 - 18 = B(-3)(-5) \quad \text{y} \quad B = -4$$

$$\text{Para } x = \tfrac{1}{2}: \quad \tfrac{1}{4} + \tfrac{23}{2} - 18 = C(-\tfrac{1}{2})(\tfrac{5}{2}) \quad \text{y} \quad C = 5$$

Por tanto,

$$\frac{x^2 + 23x - 18}{(x-1)(x+2)(2x-1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x+2} + \frac{5}{2x-1}$$

*Solución por igualación de coeficientes.* Podemos calcular las constantes $A$, $B$ y $C$ en la Ec. (2) usando el hecho de que coeficientes de potencias iguales de $x$ en los dos miembros de la ecuación son iguales. Con este propósito realizamos las multiplicaciones indicadas y reunimos términos semejantes. Así, obtenemos

$$x^2 + 23x - 18$$

$$= (2A + 2B + C)x^2 + (3A - 3B + C)x + (-2A + B - 2C)$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$2A + 2B + C = 1, \text{ como coeficientes de } x^2$$

$$3A - 3B + C = 23, \text{ como coeficientes de } x$$

$$-2A + B - 2C = -18, \text{ como términos constantes}$$

Resolviendo este sistema para $A$, $B$ y $C$, encontramos, como antes, $A = 2$, $B = -4$, $C = 5$.

El método de sustitución o el método de igualación de coeficientes de potencias iguales de la variable pueden usarse para determinar las constantes desconocidas. El método de sustitución trabaja particularmente bien cuando los factores del denominador son lineales. Con frecuencia, sin embargo, es ventajoso combinar ambos métodos.

## *EJERCICIO 18-1*

Resuelva cada fracción en fracciones parciales. Verifique sus resultados por adición.

1. $\dfrac{x-5}{(x+1)(x-1)}$
2. $\dfrac{3}{x(x+3)}$
3. $\dfrac{7x-16}{(x-2)(x-3)}$
4. $\dfrac{7x-8}{(2x-1)(x-2)}$
5. $\dfrac{3x-7}{(3x+1)(3x-1)}$
6. $\dfrac{5}{(x+1)(2x-3)}$

7. $\dfrac{11x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$ 8. $\dfrac{3x + 1}{2x^2 - x - 6}$ 9. $\dfrac{22 - 4x}{3x^2 + 2x - 8}$

10. $\dfrac{6x + 27}{4x^3 - 9x}$ 11. $\dfrac{8x - 8}{x^3 - 2x^2 - 8x}$ 12. $\dfrac{5x - 2}{6x^3 - 5x^2 + x}$

13. $\dfrac{4x^2 - 27x + 20}{(x - 3)(x - 4)(x + 2)}$ 14. $\dfrac{2x + 8}{(x + 2)(x - 2)(x + 1)}$

15. $\dfrac{15}{(2x + 1)(3x - 1)(4x - 1)}$ 16. $\dfrac{3x^2 - 15x + 10}{(1 - x)(2 - x)(3 - x)}$

## 18-3. FACTORES LINEALES REPETIDOS

Cuando el denominador es el producto de factores lineales con uno o más repetidos, asignamos denominadores a las fracciones parciales de acuerdo con el Punto II de la Sec. 18-1.

EJEMPLO. Resolvamos $\dfrac{4x^2 - 13x}{(x + 3)(x - 2)^2}$ en fracciones parciales.

*Solución por sustitución.* Esta fracción es la suma de fracciones parciales con $x + 3$, $x - 2$ y $(x - 2)^2$ como denominadores y con numeradores constantes. Por tanto,

$$\frac{4x^2 - 13x}{(x + 3)(x - 2)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 2} - \frac{C}{(x - 2)^2} \tag{1}$$

Eliminando denominadores, obtenemos

$$4x^2 - 13x = A(x - 2)^2 + B(x + 3)(x - 2) + C(x + 3) \tag{2}$$

Sustituimos sucesivamente los valores $-3$, $2$ y $0$ por $x$ en esta ecuación.

Para $x = -3$: $36 + 39 = 25A$ y $A = 3$

Para $x = 2$: $16 - 26 = 5C$ y $C = -2$

Para $x = 0$: $0 = 4A - 6B - 3C$

$$6B = 4A + 3C = 12 - 6 = 6$$

$$B = 1$$

Por tanto,

$$\frac{4x^2 - 13x}{(x + 3)(x - 2)^2} = \frac{3}{x + 3} + \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{(x - 2)^2}$$

*Solución por igualación de coeficientes.* Para determinar las constantes $A$, $B$ y $C$ por igualación de coeficientes de potencias iguales de $x$. realizamos las multiplicaciones indicadas en la Ec. (2) y agrupamos términos para llegar a

$$4x^2 - 13x = (A + B)x^2 + (-4A + B + C)x + (4A - 6B + 3C)$$

Por tanto, de los coeficientes de $x^2$, $x$, y los términos constantes, obtenemos

$$A + B = 4$$

$$-4A + B + C = -13$$

$$4A - 6B + 3C = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $A = 3$, $B = 1$, $C = -2$, que concuerda con nuestra determinación anterior.

### *EJERCICIO 18-2*

Resuelva cada fracción en fracciones parciales.

1. $\dfrac{x-5}{(x-4)^2}$
2. $\dfrac{7-8x}{(2x-1)^2}$
3. $\dfrac{2x+7}{(x+3)^2}$
4. $\dfrac{x^2-x-3}{(x-1)^3}$
5. $\dfrac{18x^2+3x+4}{(3x+1)^3}$
6. $\dfrac{x^2-2x+3}{(2-x)^3}$
7. $\dfrac{2x^2-2x-1}{(x-2)(x-1)^2}$
8. $\dfrac{6x^2-11x-32}{(x+6)(x+1)^2}$
9. $\dfrac{6x+3}{(x-1)^2(x-4)}$
10. $\dfrac{5x^2+36x-27}{x^4-6x^3+9x^2}$
11. $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{(x+1)(x-1)^3}$
12. $\dfrac{x^2+5x-3}{2x^4-3x^3}$
13. $\dfrac{7x^3+2x^2-27x+14}{(3x+2)(2x-3)(x-2)^2}$
14. $\dfrac{7x^3+32x^2-15x-32}{(2x-1)(3x+1)(x+3)^2}$
15. $\dfrac{2x^3+2x^2+2x+4}{x(x+1)(x+2)^2}$
16. $\dfrac{6x^3-15x^2+9x+3}{(2x-1)^2(x-2)^2}$

## 18-4. FACTORES CUADRATICOS DISTINTOS

Cuando el denominador contiene un factor cuadrático que no es el producto de dos factores lineales reales, el factor cuadrático es el denominador de una de las fracciones parciales. Se debe encontrar una expresión lineal para el numerador de una fracción que tiene denominador cuadrático (Punto III, Sec. 18-1).

EJEMPLO 1. Resolver $\dfrac{x^3-25x^2+21x-45}{(x-3)(x+2)(2x^2-x+3)}$ en fracciones parciales.

*Solución.* El factor cuadrático $2x^2 - x + 3$ no es el producto de dos factores lineales reales. Por tanto, las fracciones parciales tendrán $x - 3$, $x + 2$ y $2x^2 - x + 3$ como denominadores. Los numeradores de los denominadores lineales son constantes, pero el numerador del denominador cuadrático puede ser una expresión lineal. Así, tenemos

$$\frac{x^3 - 25x^2 + 21x - 45}{(x-3)(x+2)(2x^2 - x + 3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx + D}{2x^2 - x + 3} \qquad (1)$$

Simplificando la expresión, obtenemos

$$x^3 - 25x^2 + 21x - 45 = A(x+2)(2x^2 - x + 3) + B(x-3)(2x^2 - x + 3) + (Cx + D)(x-3)(x+2) \qquad (2)$$

Para determinar las constantes $A$, $B$, $C$, $D$, vamos a combinar el método de sustitución con el método de igualación de coeficientes. Sustituimos primero los valores 3, $-2$ y 0 por $x$ en la Ec. (2).

Para $x = 3$: $\quad -180 = A(5)(18) \quad$ y $\quad A = -2$

Para $x = -2$: $\quad -195 = B(-5)(13) \quad$ y $\quad B = 3$

Para $x = 0$: $\quad -45 = 6A - 9B - 6D,$

$$-45 = -12 - 27 - 6D \quad \text{y} \quad D = 1$$

Igualando coeficientes de $x^3$ llegamos a

$$1 = 2A + 2B + C,$$

$$1 = -4 + 6 + C \quad \text{y} \quad C = -1$$

Por tanto,

$$\frac{x^3 - 25x^2 + 21x - 45}{(x-3)(x+2)(2x^2 - x + 3)} = \frac{-2}{x-3} + \frac{3}{x+2} + \frac{1 - x}{2x^2 - x + 3}$$

EJEMPLO 2. Resolvamos $\dfrac{4x^3 - 10x^2 - 2x - 9}{(2x^2 - x + 3)(3x^2 + x + 1)}$ en fracciones parciales.

*Solución.*

$$\frac{4x^3 - 10x^2 - 2x - 9}{(2x^2 - x + 3)(3x^2 + x + 1)} = \frac{Ax + B}{2x^2 - x + 3} + \frac{Cx + D}{3x^2 + x + 1} \qquad (1$$

Simplificando la expresión obtenemos

$$4x^3 - 10x^2 - 2x - 9 = (Ax + B)(3x^2 + x + 1) + (Cx + D)(2x^2 - x + 3) \qquad (2$$

Para obtener cuatro ecuaciones de (2), que involucran a las incógnitas $A$, $B$, $C$ y $D$, igualamos los coeficientes de $x^3$ y luego sustituimos los valores 0, 1 y $-1$ en lugar de $x$.

Igualando coeficientes de $x^3$: $\quad 4 = 3A + 2C$

Para $x = 0$: $\quad -9 = B + 3D$

Para $x = 1$: $\quad -17 = 5A + 5B + 4C + 4D$

Para $x = -1$: $\quad -21 = -3A + 3B - 6C + 6D$

De las primeras dos ecuaciones de este sistema, tenemos

$$C = \frac{4 - 3A}{2} \quad \text{y} \quad B = -9 - 3D$$

Sustituyendo estos resultados en las otras dos ecuaciones y resolviendo para $A$ y $D$, obtenemos

$$A = 2, \quad D = -2,$$

y, finalmente,

$$B = 3, \quad C = -1.$$

Por tanto,

$$\frac{4x^3 - 10x^2 - 2x - 9}{(2x^2 - x + 3)(3x^2 + x + 1)} = \frac{2x - 3}{2x^2 - x + 3} - \frac{x + 2}{3x^2 + x + 1}$$

### *EJERCICIO 18-3*

Exprese cada fracción en términos de fracciones parciales.

1. $\dfrac{x^2 + 3x - 1}{(x - 2)(x^2 + 5)}$

2. $\dfrac{x^2 - x + 2}{(x + 1)(x^2 + 3)}$

3. $\dfrac{x^2 - 5x - 3}{(x + 3)(x^2 - 3x + 3)}$

4. $\dfrac{1 - 13x - 10x^2}{(x - 2)(2x^2 + 2x + 1)}$

5. $\dfrac{x^2 + 6x - 12}{(x - 4)(x^2 - x - 5)}$

6. $\dfrac{x^2 + 6x - 12}{(x + 2)(x^2 + x + 2)}$

7. $\dfrac{3x^3 + 8x^2 + 6x - 2}{(x + 2)(x + 1)(x^2 + 2)}$

8. $\dfrac{4x^3 + x^2 + 14x - 4}{x(x - 1)(x^2 + 4)}$

9. $\dfrac{x^2 - 7x + 1}{(x + 1)^2(x^2 - x + 1)}$

10. $\dfrac{3x^3 - 8x^2 + x - 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}$

11. $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 4x + 7}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)}$

12. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(3x^2 + 2)(2x^2 + 3)}$

13. $\dfrac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{(2x^2 + x + 2)(3x^2 - x + 1)}$

14. $\dfrac{3x^3 - 4x^2 + 10x + 4}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}$

## 8-5. FACTORES CUADRATICOS REPETIDOS

Cuando el denominador de la fracción dada tiene un factor cuadrático repetido, formamos denominadores de las fracciones parciales correspondientes como en el caso de un factor lineal repetido. Los numeradores, por supuesto, han de ser expresiones lineales.

EJEMPLO. Resolvamos $\dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2}$ en fracciones parciales.

*Solución.* Usamos $x + 1$, $x^2 + x + 1$ y $(x^2 + x + 1)^2$ como los denominadores de las fracciones parciales. El numerador de $x + 1$ es una constante; los otros numeradores pueden ser expresiones lineales. Por tanto,

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2} \qquad (1)$$

Simplificando (1) obtenemos

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = A(x^2 + x + 1)^2 + (Bx + C)(x + 1)(x^2 + x + 1) + (Dx + E)(x + 1) \qquad (2)$$

Sustituyendo $-1$ por $x$ en (2), obtenemos inmediatamente $A = 1$. Para obtener ecuaciones que determinen a las otras constantes, realizamos las multiplicaciones en el miembro derecho de (2). Tenemos, después de hacer $A = 1$,

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + B(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x) + C(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) + D(x^2 + x) + E(x + 1)$$

Reagrupando,

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = (1 + B)x^4 + (2 + 2B + C)x^3 + (3 + 2B + 2C + D)x^2 + (2 + B + 2C + D + E)x + (1 + C + E)$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$1 + B = 0, \quad \text{como coeficientes de } x^4$$
$$2 + 2B + C = 1, \quad \text{como coeficientes de } x^3$$
$$3 + 2B + 2C + D = 4, \quad \text{como coeficientes de } x^2$$
$$1 + C + E = 3, \quad \text{como términos constantes}$$

Las primeras dos de estas ecuaciones nos dan $B = -1$ y $C = 1$. Las dos últimas nos dan $E = 1$ y $D = 1$. Por tanto,

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1}{x + 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

## *EJERCICIO 18-4*

Descomponga cada fracción en fracciones parciales.

1. $\dfrac{3x^3 + 4x - 5}{(x^2 - 2)^2}$

2. $\dfrac{x^3 + x^2 - x + 4}{(x^2 + 1)^2}$

3. $\dfrac{3x^2 + 5x - 3}{(x^2 + x + 1)^2}$

4. $\dfrac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 2)^3}$

**5.** $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 11x + 21}{(x^2 - x + 4)^3}$

**6.** $\dfrac{2x^3 - x^2 + 6x - 11}{(x^2 + x + 3)^3}$

**7.** $\dfrac{x^4 + 4x^2 - x + 3}{(x^2 + 1)^3}$

**8.** $\dfrac{3x^4 - 13x^3 + 30x^2 - 36x + 27}{x(x^2 - 2x + 3)^2}$

**9.** $\dfrac{5x^2 + 18}{x(x^2 + 3)^2}$

**10.** $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2(2x^2 + 1)^2}$

**11.** $\dfrac{x^5 + 11x^3 + 10x^2 + 25x + 50}{x^2(x^2 + 5)^2}$

**12.** $\dfrac{x^4 + 4x^2 - x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2)^2}$

**13.** $\dfrac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 10x + 5}{(x - 3)(x^2 - 2x + 2)^2}$

**14.** $\dfrac{4x^4 + 7x^3 + 18x^2 - 3x + 11}{(2x - 1)(x^2 + x + 2)^2}$

# RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES

## *EJERCICIO 1-1 PAG. 16*

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{x|x$ es un entero entre 0 y $8\}$
3. {M, Tu W, Th, F, S}, $\{x|x$ es un día de la semana$\}$
5. {Washington, Adams, Jefferson}, $\{x|x$ es uno de los tres primeros presidentes de EUA$\}$
7. {Génesis, Exodo, Levítico, Números, Deuteronomio}, $\{x|x$ es un libro del Pentateuco$\}$
9. Ninguno de los casos
11. $S = T = \varnothing$
13. $a = 0,\ b = 1,\ c = 4$
15. $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

## *EJERCICIO 1-2 PAG. 19*

1. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $\{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
5. $\{4, 5, 6, 7\}$
7. $\varnothing$
9. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
11. $\{0, 1, 3, 4, 5\}$
13. $\{r, s\} = \{r, s\}$
15. $\varnothing \neq \{p, q, r, s, t, u\}$
25. $P \times Q = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$
    $Q \times P = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

## *EJERCICIO 2-1 PAG. 25*

1. Axioma 2
3. Axiomas 2 y 5
5. Axioma 6
7. Axiomas 2 y 6
9. Axioma 6
11. Axioma 4
13. Axiomas 2 y 6
15. $-1, \frac{1}{1}$
17. $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2/3}$
19. $-(2x + y), \frac{1}{2x + y}$
21. $-\left(-\frac{3a}{2b}\right), \frac{1}{-3a/2b}$
23. (a) $x = 1$, (b) $x = 0$, (c) $x = d$

## EJERCICIO 2-3 PAG. 39

**1.** $0.38 = \frac{38}{100}$ **3.** $-11.62 = -\frac{1162}{100}$ **5.** $\frac{5}{6} = 0.8333\cdots$
**7.** $\frac{34}{11} = 3.090909\cdots$ **9.** $\frac{21}{37} = 0.567567\cdots$ **11.** $\frac{103}{33} = 3.121212\cdots$
**15.** $3 < 8$ **17.** $5 > 3$ **19.** $3 > -4$
**21.** $-5 < -2$ **23.** Enteros positivos
**25.** Números negativos **27.** Los números racionales
**29.** Los números irracionales

## EJERCICIO 3-1 PAG. 45

**1.** $-8$ **3.** $-22$ **5.** 9 **7.** 11 **9.** $6mn$
**11.** 12 **13.** $6x$ **15.** $-2$ **17.** $-8a$ **19.** $-5$
**21.** $-a + 9b - 3c$; $11a + 9b - 17c$
**23.** $6x - xy - 3yz - 9$, $13xy + 9yz + 17$
**25.** $a + 15b + 34c$; $-15a - b + 8c$
**27.** $-9r + 4rs + 6x$; $7r$ **29.** $x + y - 4$
**31.** $y$ **33.** $1 - 2a + 2b$
**35.** $3x + 1$ **37.** $6xy + 5x - 3y$
**39.** $2 - (5x + 6y - 7z)$, $2 + (-5x - 6y + 7z)$
**41.** $c - (xy - 3 + yz)$, $c + (-xy + 3 - yz)$
**43.** $-(x + 4y + 3z)$, $(-x - 4y - 3z)$

## EJERCICIO 3-2 PAG. 48

**1.** 40 **3.** $-60$ **5.** $-18a^3b^3$ **7.** $-6x^2y^2$
**9.** $6x^5y^4$ **11.** $x^4y - xy^4$ **13.** $x^2 - 4y^2$ **15.** $4 - 5x - 6x^2$
**17.** $9x^2 - 25y^2$ **19.** $x^3 + 1$
**21.** $2c^3 + 13ac^2 + 19a^2c - 4a^3$ **23.** $3x^4 - 5x^3 - 27x^2 + 35x + 42$
**25.** $a^2 + 2ab + b^2 - 1$ **27.** $a^4 - a^3 - 5a^2 + 17a - 12$
**29.** $6x^4 + x^3 - x^2 - 10x - 24$ **31.** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
**33.** $6 - m - 5m^2 + 2m^3$

## EJERCICIO 3-3 PAG. 52

**1.** $2x^2$ **3.** $-2$ **5.** $5ab^2 - 3$ **7.** $m - n - 1$
**9.** $1 - 2x^2y$ **11.** $3x - 8$ **13.** $x^2 - 2x - 2 + \dfrac{12}{x + 2}$
**15.** $x^2 - 3x - 1 + \dfrac{-11}{2x + 6}$ **17.** $a^2 - ab + b^2$ **19.** $x + 9$
**21.** $2x^2 + x - 3$ **23.** $x^2 + xy + y^2$ **25.** $2m^2 - mn + 3n^2$
**27.** $x^3 - x + 4 + (8x - 2)/(x^2 + x + 2)$ **29.** $x^3 - x^2 + x + 4$

## EJERCICIO 3-4 PAG. 55

**1.** $m^2 - 16$ **3.** $x^4 - y^4$
**5.** $9a^4 - 121b^2$ **7.** $r^2 + 8rs + 16s^2$

**9.** $4x^2 - 12xy + 9y^2$
**11.** $16x^4 + 24x^2y^2 + 9y^2$
**13.** $x^2 - 22x + 121 + 2xy - 22y + y^2$
**15.** $x^2 + 8x + 15$
**17.** $6m^2 + 7m + 2$
**19.** $7a^2 - 41ab - 6b^2$
**21.** $6r^4 - 5r^2s^2 - 6s^4$
**23.** $m^2n^2 - mny - 2y^2$
**25.** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
**27.** $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
**29.** $-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$
**31.** $a^2 + 2ab + b^2 - 1$
**33.** $1 - 6m + 9m^2 - n^2$
**35.** $x^2 + 2x + 1 - 25y^2$

## *CAPITULO 3 EJERCICIO DE REVISION PAG. 55*

**1.** 0 **3.** 6 **5.** $-1$ **7.** 12
**9.** $6a^3b^4$ **11.** $-14a^3b^6$ **13.** $-12a^4b^6$ **15.** $-6a^6b^4$
**17.** $2a^2b^2 + 6ab^3 - 4a^2b^5$
**19.** $-5a^5 + 15a^3b^2 + 15a^4b^2$
**21.** $2a^2 + ab - b^2$
**23.** $12a^2 + ab - 6b^2$
**25.** $b^3 + ab^2 - a^2b + 2a^3$
**27.** $a^4 + 2a^3 - 5a^2 - 14a - 8$
**29.** $3x^2$ **31.** $-2xy^2$ **33.** $3xy^2 - 2$ **35.** $x - 7$ **37.** $2x + 3$

**39.** $2x + 3 + \dfrac{-2}{4x - 1}$

**41.** $2x^2 + 6x + 9 + \dfrac{-3}{x - 3}$

**43.** $x - 9 + \dfrac{54}{x^2 - x + 3}$

**45.** $3x^2 + x + 2 + \dfrac{-8x - 11}{x^2 - 2x + 4}$

**47.** $2x^3 + 2x^2 - x + \dfrac{1}{2x - 3}$

**49.** $9x^4 - 16$

**51.** $16 - 8x + x^2$
**53.** $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$
**55.** $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 8x - 12y + 4$
**57.** $x^2 - x - 30$
**59.** $6x^2 + 13xy - 28y^2$
**61.** $14x^2 + 41xy - 28y^2$
**63.** $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
**65.** $x^3y^3 - 9x^2y^2z + 27xyz^2 - 27z^3$
**67.** $x^2 + 2xy + y^2 - 9$
**69.** $x^4 + x^2 + 1$
**71.** $x^2 - 25y^2 + 10y - 1$

## *EJERCICIO 4-1 PAG. 58*

**1.** $x(x^2 - xy + 2y^3)$
**3.** $3x(x - y + 2y^2)$
**5.** $(a + 2b)(m - n)$
**7.** $(3x + y)(3x - y)$
**9.** $(1 + 7y)(1 - 7y)$
**11.** $2a(x + 5y)(x - 5y)$
**13.** $(a - 1 + b)(a - 1 - b)$
**15.** $(2xy + z - 1)(2xy - z + 1)$
**17.** $(x - 3)^2$ **19.** $(4a + b)^2$ **21.** $3a(x + 1)^2$
**23.** $(a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)$
**25.** $(3pq + 2)(9p^2q^2 - 6pq + 4)$
**27.** $2xy(y - x)(y^2 + xy + x^2)$
**29.** $x(x^2 + 6xy + 12y^2)$
**31.** $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$
**33.** $(a^2 + 25b^2)(a + 5b)(a - 5b)$
**35.** $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$
**37.** $3a^3b^2(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$
**39.** $(2m + n - 2)(2m - n)$

**41.** $a^2b^2(2a - 3b)^2$

**43.** $\left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{2}\right)^2$

## EJERCICIO 4-2 PAG. 60

1. $(m + 2)(m + 4)$
3. $(m - 4)(m - 5)$
5. $m - 7n)(m + 3n)$
7. $(m + 2n)(m + 9n)$
9. $(3x - 2)(x + 2)$
11. $5x + 1)(2x - 3)$
13. $(7 + x)(3 - 4x)$
15. $(2x + y)(3x - 7y)$
17. $(a + 2)(a - 2)(a^2 - 3)$
19. $(2a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$
21. $(3a^2 + 2)(a + 2)(a - 2)$
23. $(a + 1)(a - 1)3a + 2)(3a - 2)$
25. $(3x - 3y - 1)(x - y - 2)$
27. $3xy(x - 2y)(4x - y)$
29. $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

## EJERCICIO 4-3 PAG. 61

1. $(x + y)(a + 4)$
3. $(x - y)(a + 2c)$
5. $(y + 3a)(3x - a)$
7. $2(2 - m)(1 + m)(1 - m)$
9. $(x + 1)(x + 1 + a)$
11. $(x + y)(x - y + 5)$
13. $(x - y + 1)(x - y - 1)$
15. $(m + 2n - 3)(m - 2n + 3)$
17. $(x - 1 + y + z)(x - 1 - y - z)$
19. $(x + y - 6)(x - y - 2)$
21. $(a + b)(a^2 - ab + b^2 - a - b)$
23. $(8a^2 + 1 + 4c)(8a^2 + 1 - 4a)$
25. $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
27. $(2a^2 + 3b^2 + 2ab)(2a^2 + 3b^2 - 2ab)$

## EJERCICIO 4-4 PAG. 64

1. $\frac{y}{3x}$
3. $\frac{a^2}{2b^5}$
5. $\frac{x}{a}$
7. $\frac{x - 2}{x + 2}$
9. $\frac{-1}{x}$
11. $\frac{b + a}{b - a}$
13. $\frac{3}{2}$
15. $\frac{a - b}{2a - b}$
17. $-\frac{x + 2}{4x + 1}$
19. $\frac{3 - x}{3 - 2x}$
21. $\frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}$
23. $\frac{x - y + 1}{x - y}$
25. $\frac{y - 1}{y + 1}$
27. $\frac{c + 3}{c - 1}$

## EJERCICIO 4-5 PAG. 66

1. $\frac{4}{3}$
3. $6b$
5. $\frac{bx}{6}$
7. $\frac{ab}{18}$
9. $\frac{24x}{y^3}$
11. $-\frac{1}{2}$
13. $-2$
15. $2x - 2y$
17. $\frac{2 - x}{4 + 2x + x^2}$
19. $\frac{x + 3}{x + 6}$
21. $\frac{b(x + 7)}{2a(3x - 2)}$
23. $\frac{(x - 3)(x - 2)}{(x + 7)(x + 2)}$
25. $(a - 1)(a - 3)$
27. 1
29. $\frac{x}{2(1 - x)}$
31. $\frac{(a - 2)(3a + 5)}{(a + 2)(a + 5)}$
33. $\frac{(3x + y)(x + 5y)}{2(x + 2y)(3x - 2y)}$

## EJERCICIO 4-6 PAG. 69

1. $180x^3y^2$

3. $12a(a+2)(a-2)$

5. $(3x-y)(x+2y)(2x+y)$

7. $\dfrac{5x+y}{3z}$

9. $\dfrac{4}{x-3}$

11. $\dfrac{yz+xz+xy}{xyz}$

13. $\dfrac{a^2-2a-10}{a(a+5)}$

15. $\dfrac{a+39}{(a-9)(a+3)}$

17. $\dfrac{2y+1}{y^2-4}$

19. $\dfrac{4y^2-b^2+1}{2y+b}$

21. $\dfrac{2a^3-4a^2+3a-1}{a^2+1}$

23. $\dfrac{19m-39}{(m+3)(m-5)}$

25. $\dfrac{16-13x+3x^2}{(3-x)(1-x)(2-x)}$

27. $\dfrac{-x^3-10x^2+20}{(x-1)(x^2-4)}$

29. $\dfrac{-2x}{2x+1}$

31. $\dfrac{x}{2x-3}$

33. $\dfrac{m-3}{m^2-m+1}$

35. $\dfrac{2a-b}{a+2b}$

37. $\dfrac{11a-1}{(2a+1)(2a-3)}$

## EJERCICIO 4-7 PAG. 71

1. $\frac{1}{8}$

3. $\dfrac{4+x}{4-x}$

5. $\dfrac{3-x}{3+x}$

7. $\dfrac{3}{x+1}$

9. $\dfrac{5+x}{6-4x}$

11. $\dfrac{1-x}{2-5x}$

13. $\dfrac{(3x-10)(x+2)}{(2x+3)(x-2)}$

15. $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x(x+4)}$

17. $1-x$

## CAPITULO 4 EJERCICIO DE REVISION PAG. 72

1. $x(x-3y+1)$

3. $(3a+1)(3a-1)$

5. $2(2m+n)(2m-n)$

7. $(2+a)(4-2a+a^2)$

9. $(2m+3n)(4m^2-6mn+9n^2)$

11. $(1-x-y)(1+x+y+x^2+2xy+y^2)$

13. $(x-4)(x-5)$

15. $(2-a)^2$

17. $(2x+3)(x+2)$

19. $(x^2+1)(x+2)(x-2)$

21. $(3x+y)^2$

23. $(a-b)(4-a)$

25. $(x-y)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

27. $(x-y)(x+y+3)$

29. $(x-2)(x+y+1)$

31. $(5+a-3)(5-a+3)$

33. $(2x-y+z)(x-1)$

35. $(2a+3)^3$

37. $(m+n-3)^2$

39. $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$

41. $(2m^2+n^2)(4m^4-2m^2n^2+n^4)$

43. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

45. $(2x^2+3xy-3y^2)(2x^3-3xy-3y^2)$

47. $(x+y+4)(x+y-1)$

49. $(3m-3n-2)(3m-3n-1)$

51. $\dfrac{3-x^2}{-4x-2}, -\dfrac{3-x^2}{4x+2}, -\dfrac{x^2-3}{-4x-2}$

53. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-1}, -\dfrac{2-x-x^2}{x^2-x-1}, -\dfrac{x^2+x-2}{1+x-x^2}$

55. $3x + 4y$ 57. 2 59. $\dfrac{x + 5y}{2x - y}$

61. $\dfrac{x(1 - x)}{2(1 + x)^2}$ 63. $\dfrac{3}{a + 2}$

65. $\dfrac{-m^2 + m - 9}{(m - 1)(m - 2)(2m + 7)}$ 67. $\dfrac{x(x + 1)}{4}$

69. $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ 71. $\dfrac{x + y + 3xy - y^2}{x(y + 1)}$

73. $\dfrac{c - 2d}{2c + 3d}$ 75. $\dfrac{2 + x}{2 - x}$ 77. Sí

## *EJERCICIO 5-1 PAG. 80*

3. (a) sobre el eje $x$, (b) sobre el eje $y$
5. (a) sobre la línea que es bisectriz del primero y tercer cuadrantes; (b) sobre la línea que es bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes
7. (a) (4, 2), (b) (−4, 2), (c) (6, 4)
9. $\{2, 3, 4\}$ dominio, $\{1, -1, -3\}$ rango
11. Una relación 13. Una relación
15. 1, 2, −10 17. $-4, 4, \dfrac{2s + 1}{2s + 2}$
19. $x^2 + 2hx + h^2$, $2hx + h^2$
21. $\{x|x \geq 0\}$ dominio, $\{y|y \geq 0\}$ rango
23. $\{x|-4 \leq x \leq 4\}$ dominio, $\{y|0 \leq y \leq 4\}$ rango
25. $\{x|x \in R\}$ dominio, $\{y|y \geq 1\}$ rango

## *EJERCICIO 5-2 PAG. 88*

1. 5 3. $3\sqrt{2}$ 5. 5
7. 3, 4, 5 9. $\sqrt{29}, \sqrt{13}, 2\sqrt{17}$ 11. Isósceles
13. Isósceles 15. Línea recta
17. $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 15 = 0$ 19. $x^2 + y^2 = 36$
21. $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 23. $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 14$
25. $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0$ 27. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$

## *EJERCICIO 6-1 PAG. 95*

1. $x = -1$ 3. $x = 0$ 5. $x = -5$ 7. $x = \frac{1}{2}$
9. $x = \dfrac{4 - 2b}{10 - 3a}$ 11. $\dfrac{2a - 7}{2 - 3a}$ 13. $x = \frac{8}{5}$ 15. $x = \frac{1}{8}$
17. $x = \frac{2}{3}$ 19. $x = \frac{3}{4}$ 21. No hay solución 23. No hay solución

## *EJERCICIO 6-2 PAG. 98*

**1.** 41, 46, 51
**3.** 5 por 11
**5.** $5\frac{5}{11}$ días
**7.** 3 hr
**9.** 12 oz
**11.** $10\frac{5}{9}$ oz oro, $4\frac{4}{9}$ oz plata
**13.** $\frac{-3}{1}$
**15.** 6% y 7%
**17.** 88
**19.** 1.5 hr
**21.** 4 mph, 6 mph
**23.** 12 mph

## *EJERCICIO 6-3 PAG. 105*

**11.** $x = 4, y = 2$
**13.** Ecuaciones dependientes
**15.** $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}$
**17.** $x = 5, y = -1$
**19.** $x = b + a, y = b - a$
**21.** $x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$
**23.** $x = -2, y = 0$
**25.** $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{3}{2}$
**27.** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$

## *EJERCICIO 6-4 PAG. 108*

**1.** $x = -2, y = -2, z = 1$
**3.** $u = 0, v = 0, w = 5$
**5.** $x = \frac{2}{9}, y = \frac{1}{18}, z = \frac{2}{3}$
**7.** $x = 4, y = -3, z = 2$
**9.** $x = \frac{1}{8}, y = \frac{1}{8}, z = -\frac{5}{8}$
**11.** $u = a + b, v = a - b, w = 2a$
**13.** $u = 3, v = 2, w = -4$
**15.** $x = \dfrac{9}{5a}, y = \dfrac{-1}{5b}, z = \dfrac{-3}{5c}$
**17.** $x = -1, y = -1, z = 3$

## *EJERCICIO 6-5 PAG. 109*

**1.** 9, 23
**3.** 80 monedas de 10 cts, 112 de 25
**5.** \$3,000 a 3%, \$2,000 a 4%
**7.** A 15 días, B 20 días
**9.** $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
**11.** 215 y 55 mph
**13.** 5 mph, 3 mph
**15.** 15°, 75°, 90°
**17.** 80 monedas de 50 cts, 80 de 25 cts, 100 de 10 cts, 100 de 5 cts
**19.** A 12 hr, B 36 hr, C 18 hr
**21.** 817
**23.** A 60 hr, B 72 hr, C 90 hr

## *EJERCICIO 6-6 PAG. 113*

**1.** $\frac{4}{1}$
**3.** $\frac{1}{8}$
**5.** $\frac{9}{2}, \frac{2}{4}$
**7.** 33, $-\frac{121}{3}$
**9.** $x = \frac{14}{5}$
**11.** $a = \frac{-1}{19}$
**13.** $x = \frac{4}{5}, y = \frac{6}{5}$
**15.** $5\frac{1}{4}$ mi
**17.** 4.8 plg, 5.6 plg, 7.2 plg

## *EJERCICIO 6-7 PAG. 117*

**1.** $S = kr^2$
**3.** $V = khr^2$
**5.** $s = kt^2$
**7.** 7.68 qt
**9.** 1080 plg³ 540 plg³ 432 plg³
**11.** 15 días
**13.** 1200 ohms
**15.** Razón 9 a 16
**17.** 675 watts
**19.** Razón 5 a 3

## CAPITULO 6 EJERCICIO DE REVISION PAG. 118

1. $x = -\frac{11}{4}$
3. $x = 0$
5. $x = -\frac{13}{8}$
7. $x = -3$
9. No hay solución
11. $x = 2, y = -4$
13. $x = -\frac{3}{8}, y = -\frac{11}{5}$
15. $x = -\frac{6}{a}, y = 4$
17. $x = \frac{13}{17}, y = -\frac{13}{6}$
19. $x = \frac{14}{13}, y = -\frac{28}{3}$
21. $\frac{10}{12}$
23. \$7500 a 7%, \$6250 a 8%
25. 93

## EJERCICIO 7-1 PAG. 123

1. 32
3. $\frac{1}{4}$
5. 1
7. $\frac{1}{5}$
9. $\frac{1}{36}$
11. $\frac{1}{9}$
13. 7
15. $\frac{1}{16}$
17. $x^4y^2$
19. $b$
21. $\frac{2a^2b^5}{5}$
23. $\frac{8x^3}{y^3}$
25. $\frac{p^6q^4}{r^2}$
27. $\frac{r^2}{p^3}$
29. $-3$
31. $\frac{1}{xy^2 + x^2y}$
33. $x^2 + y^2$
35. $y^2 - xy + x^2$

## EJERCICIO 7-2 PAG. 127

1. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{4}$
5. $\frac{27}{8}$
7. 16
9. 5
11. $x^{1/5}$
13. $5^{5/6}$
15. $\frac{y}{x^2}$
17. $x + x^{1/2}y^{1/2} + y$
19. $\frac{27}{x^2}$
21. $5x^2$
23. $x^4y^3$
25. $\frac{4x^{5/6}}{y}$
27. $\frac{3ab^{1/6}}{4}$
29. $\frac{x^{12}y^6}{36}$

## EJERCICIO 7-3 PAG. 129

1. $2\sqrt{3}$
3. $2a^2b\sqrt{5}$
5. $4xy\sqrt[3]{xy^2}$
7. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
9. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$
11. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{6}$
13. $\frac{1}{3y}\sqrt[3]{18xy^2}$
15. $\frac{1}{2c}\sqrt[4]{4bc}$
17. $\sqrt{3}$
19. $xy\sqrt{2y}$
21. $\frac{1}{x}\sqrt{3x}$
23. $\frac{1}{2x}\sqrt{2x^2 + 4x}$
25. $\sqrt{12}$
27. $\sqrt{4 - x}$
29. $\sqrt{3ab}$
31. $\sqrt[6]{3}$
33. $2\sqrt[6]{2}$
35. $\sqrt[12]{128}$

## EJERCICIO 7-4 PAG. 130

1. $4\sqrt{2}$
3. $7\sqrt{7}$
5. $5\sqrt{2} + 5\sqrt{7}$
7. $2\sqrt{3}$
9. $7\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{50}$
11. $(2x - 8)\sqrt{2x}$

13. $(2x^2 + x - 15x^3y)\sqrt{3y}$ 15. $(1 + 2ab - 3b^2)\sqrt[3]{3a^2}$

17. $(1 + a + 2b)\sqrt[3]{2ab^2}$ 19. $a\sqrt{3}$ 21. $\frac{x-3}{2x}\sqrt{2x}$

## EJERCICIO 7-5 PAG. 132

1. $\sqrt{14}$ 3. $15\sqrt{2}$ 5. $3\sqrt[3]{2}$ 7. $4a\sqrt[3]{b}$

9. $\sqrt[6]{72}$ 11. $x\sqrt[12]{x}$ 13. $2\sqrt[3]{3}$ 15. $\sqrt{9-a}$

17. $6 - 3\sqrt{2}$ 19. 3 21. $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ 23. $\frac{1}{x}$

25. $\frac{1}{a}\sqrt[3]{28a^2}$ 27. $\sqrt[6]{3}$ 29. $\frac{1}{a}\sqrt[6]{a^5b^4}$

31. $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ 33. $\frac{5\sqrt{5}-2}{23}$ 35. $\frac{7\sqrt{15}-26}{7}$

## EJERCICIO 7-6 PAG. 135

1. $2i$ 3. $i\sqrt{11}$ 5. $-6i\sqrt{2}$ 7. $7 + 7i$

9. $-11 - 5i$ 11. 13 13. 7 15. $c^2 - d^2$

17. $16i$ 19. $2c$

## CAPITULO 7 EJERCICIO DE REVISION PAG. 136

1. $36x^7y^8$ 3. $\frac{b^3}{a}$ 5. $2a^2$ 7. $\frac{1}{8x^6y^3}$

9. $\frac{9q^{12}}{25p^2}$ 11. $x^2q^3 + x^3q^2$ 13. $\frac{y^4 - x^4}{y^4 + x^4}$ 15. $\frac{7}{4}$

17. $\frac{8xy^5z}{5}$ 19. 9 21. $\frac{1}{27}$ 23. 16

25. 81 27. $-8$ 29. $\frac{1}{625}$ 31. $a^{14/15}$

33. $\frac{1}{a^{1/5}}$ 35. $a^5 - 1$ 37. $\frac{6^{1/2}}{x^{5/3}y^3}$ 39. $4x^{5/6}y^{1/6}$

41. $\frac{4}{9x^7y^6}$ 43. $4\sqrt{2}$ 45. $3a^2\sqrt{2}$ 47. $2x\sqrt[3]{4xy^2}$

49. $3xy\sqrt[3]{xy^2}$ 51. $2x\sqrt[5]{y}$ 53. $\frac{1}{3}\sqrt{15a}$ 55. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{9}$

57. $\frac{1}{5}\sqrt[4]{375}$ 59. $\frac{1}{a}\sqrt[4]{4a^3b^3}$ 61. $\frac{1}{3x}\sqrt[3]{9x^2(x+1)}$

63. $\frac{1}{bc}\sqrt{bc(a-1)}$ 65. $\sqrt{16x^2y}$ 67. $\sqrt{a^2-9}$

69. $\sqrt[3]{12a}$ 71. $\sqrt[6]{a^5}$ 73. $\sqrt[6]{75}$
75. $2\sqrt[8]{2}$ 77. $2\sqrt{5} - 18\sqrt{3}$ 79. $-2\sqrt{15}$
81. $3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ 83. $(2ab + 1 - 3b^2)\sqrt[3]{3a^2}$
85. $\sqrt{3a}$ 87. $\frac{2a}{b}\sqrt{ab}$ 89. $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{xyz^2}$
91. $78\sqrt{2}$ 93. $3xy^2\sqrt{6xy}$ 95. $4z\sqrt[3]{b}$
97. $\sqrt[6]{288}$ 99. $2x\sqrt[6]{27x}$ 101. $\sqrt[6]{864}$
103. $\sqrt{16 - a}$ 105. $2\sqrt[4]{2}$ 107. 2
109. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ 111. $\frac{\sqrt[6]{a^2b}}{a}$ 113. $\frac{\sqrt[4]{x}}{x}$
115. $-\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{4}$ 117. $2\sqrt{42} - 13$ 119. $\frac{10 + \sqrt{91}}{3}$
121. $4 - \sqrt{14}$ 123. $\frac{33 - \sqrt{35}}{62}$

## *EJERCICIO 8-1 PAG. 149*

1. $\pm\sqrt{3}$ 3. $\pm 5i$ 5. $\pm\frac{b}{a}$ 7. $-1, 2$
9. $-8, -1$ 11. $-1, -\frac{1}{2}$ 13. $\pm\frac{1}{9}$ 15. $\pm\frac{7}{2}$
17. $-\frac{1}{2}, 3$ 19. $\frac{3}{2}, \frac{1}{9}$ 21. $-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ 23. $-b, a$
25. $-\frac{1}{a}, b$

## *EJERCICIO 8-2 PAG. 142*

1. 1, 3 3. $\frac{1}{2}, 2$ 5. $2 \pm \sqrt{3}$ 7. $4 \pm 3i$
9. $\frac{3 \pm 3i}{2}$ 11. $-4$ 13. $\frac{3}{2}$ 15. $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
17. $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ 19. $\frac{9 \pm \sqrt{33}}{8}$ 21. $\frac{1 \pm 3i}{2}$
23. $-1, -\frac{1}{m}$ 25. $\frac{-1}{a+b}, \frac{2}{a+b}$ 27. 11, 13; $-13, -11$
29. (a) 50 yd por, 200 yd, o 100 yd por by 100 yd
(b) 75 yd por 150 yd
31. 200 mph y 700 mph
33. (a) 50 yd por 225 yd, o 75 yd por 150 yd
(b) 100 yd por 150 yd
35. 4 seg, 3 seg, 2 seg 37. (a) 2.5 seg; (b) 2 seg, 3 seg
39. 1 seg y 2 seg

## EJERCICIO 8-3 PAG. 146

1. $\pm 1, \pm 3$
3. $\pm\sqrt{2}, \pm i$
5. $1, 9$
7. $\pm 1, \pm 8$
9. $\pm\frac{1}{3}, \pm i$
11. $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$
13. $1, 4, \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$
15. $-1 \pm \sqrt{5}$
17. $-1, \frac{1}{2}$
19. $\frac{13}{3}$

## EJERCICIO 8-4 PAG. 148

1. $\pm 2$
3. $2, 4$
5. $4$
7. No hay solución
9. $6$
11. $1$
13. $4$
15. $3, 4$
17. No hay solución
19. No hay solución

## EJERCICIO 8-5 PAG. 151

1. Reales, desiguales, racionales; $-6, 5$
3. Reales, desiguales, irracionales; $\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}$
5. Reales, iguales, racionales; $3, \frac{9}{4}$
7. Imaginarias, desiguales; $0, \frac{3}{5}$
9. Reales, desiguales, irracionales; $0, -\frac{4}{7}$
11. Reales, desiguales, irracionales; $\frac{4}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}$
13. Reales, desiguales, irracionales; $\frac{1}{2}\sqrt{10}, -3$
15. $x^2 - 7x + 12 = 0$
17. $9x^2 + 6x - 8 = 0$
19. $10x^2 + 7x - 12 = 0$
21. $x^2 + 4 = 0$
23. $x^2 - 6x + 6 = 0$
25. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 10 = 0$
27. $3$
29. $3$
31. $21$
33. $\frac{27}{64}$
35. $10$
37. $4$
39. $4$

## EJERCICIO 8-6 PAG. 157

1. mín $(4, -6)$
3. máx $(-3, 10)$
5. mín $(-\frac{1}{2}, 0)$
7. máx $(-3, 18)$
9. mín $(\frac{1}{2}, -\frac{19}{4})$
11. 110 por 110 rd
13. 3750 rd²
15. 35

## CAPITULO 8 EJERCICIO DE REVISION PAG. 157

1. $\frac{3}{2}, -1$
3. $-\frac{1}{4}, 3$
5. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$
7. $2a, -2b$
9. $-4, 5$
11. $-5, 6$
13. $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$
15. $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$
17. $3 \pm 2i$
19. $-\frac{1}{2}, 2$
21. $-\frac{2}{3}, 1$
23. $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}$
25. $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{8}$
27. $\frac{-5 \pm \sqrt{7}}{9}$
29. $\pm 3i, \pm 2i$
31. $\pm\sqrt{3}, \pm 2$
33. $\pm 2, \frac{\pm i\sqrt{2}}{2}$
35. $25$
37. $-2, 1$
39. $1, 27$
41. $-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$
43. $-\frac{1}{3}, -\frac{6}{5}$
45. $\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}, \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{8}$

47. $\pm 3$
49. 7
51. 0
53. No hay solución
55. 7
57. 5
59. 2
61. 3
63. $\frac{7}{2}, 3$
65. 12
67. No hay solución
69. $(-4, -4)$
71. $(2, 3)$
73. $(1, \frac{1}{2})$
75. $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$

## *EJERCICIO 9-1 PAG. 164*

Las soluciones obtenidas gráficamente deberán diferir ligeramente de los resultados dados aquí.

1. $(0, 0), (4, 4)$
3. $(6, 2), (-4, -3)$
5. $(2, 1), (-1.3, -2.3)$
7. $(2.8, 1.4), (-2.8, -1.4), (1.4, 2.8), (-1.4, -2.8)$
9. $(\pm 1, 4), (\pm 1, -4)$
11. $(\pm 2, 2)$

## *EJERCICIO 9-2 PAG. 167*

1. $(-4, \pm 3), (4, \pm 3)$
3. $(-\sqrt{7}, \pm\sqrt{3}), (\sqrt{7}, \pm\sqrt{3})$
5. $(-3, \pm 2i), (3, \pm 2i)$
7. $(-1, \pm i\sqrt{2}), (1, \pm i\sqrt{2})$
9. $(-2, \pm 1), (2, \pm 1)$
11. $(-1, 3), (-21, -7)$
13. $\left(\frac{8 + i\sqrt{11}}{5}, \frac{-4 + 2i\sqrt{11}}{5}\right), \left(\frac{8 - i\sqrt{11}}{5}, \frac{-4 - 2i\sqrt{11}}{5}\right)$
15. $(4, 3), (-2, -5)$
17. $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), (1, -1)$
19. $\left(\frac{-3\sqrt{5}}{4}, \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3\sqrt{5}}{4}, \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$
21. $(1, 0), (0, -\frac{1}{2})$

## *EJERCICIO 9-3 PAG. 168*

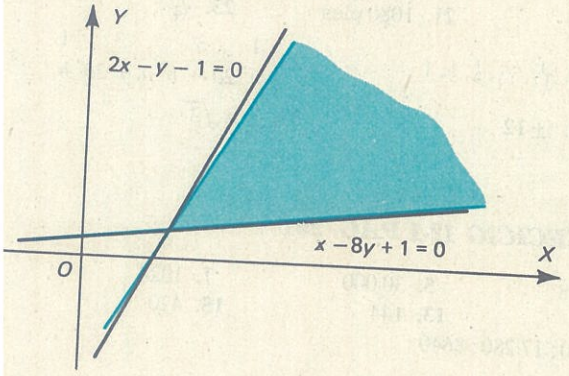
1. $(-2, -1), (2, 1), (\pm\sqrt{3}, 0)$
3. $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
5. $(-2, 3), (2, -3), (-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$
7. $(\pm\sqrt{5}, 0), (-3, 4), (3, -4)$
9. $(\pm\sqrt{15}, 0), (1, -2), (-1, 2)$
11. $(3, -2), (-3, 2), (8\sqrt{7}/7, -4\sqrt{7}/7), (-8\sqrt{7}/7, 4\sqrt{7}/7)$
13. $(-3i, -2i), (3i, 2i), (2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}), (-2/\sqrt{29}, -3/\sqrt{29})$
17. $(2, 2), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
19. $(3, 0), (0, 3), (-2, -5), (-5, -2)$
21. 8 por 12
23. 10, 13, 13
25. 30 por 40 plg
27. 60 cts, 40
29. 40 mph, 60 mph, 100 mi
31. 10 acres, \$500 por acre
33. 8 por 10 pies
35. 1 000 bushels a \$3 por bushel
37. 24 y 16 pies
39. 12 por 16 plg

## *EJERCICIO 10-2 PAG. 178*

1. $x > 3$
3. $x > 4$
5. $x < -\frac{1}{2}$
7. $-2 < x < 2$
9. $-5 \leq x \leq 5$
11. $1 < x < 3$
13. $-2 < x < 2.5$
15. $1 < x < 3.5$
17. $x < 0$ o $x > 1$
19. $x < -4$ o $x > 4$
21. $x < 0$

## EJERCICIO 10-4 PAG. 182

1. $-1 < x < 3$
3. $-1 < x < 2$
5. No hay solución, o el conjunto vacío $\emptyset$.
7. $1 < x < 5$
9. $2 < x < 7$
11. $-\frac{9}{5} \leq x \leq 3$
13. La región angular por debajo de la línea $2x - y - 1 = 0$ y por arriba de la línea $x - 8y + 1 = 0$, como se muestra en la figura.
15. La región debajo de la línea $2x - y = 2$ y arriba de la línea $2x + y = 2$
17. La región arriba de la línea $4x + 3y - 6 = 0$.
19. La región angular debajo de la línea $3x + 4y + 14 = 0$ y también debajo de la línea $2x - 5y - 6 = 0$.
21. No hay solución.
23. La región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 16$ y debajo de la línea $y - 3x + 9 = 0$.
25. La región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 16$ y dentro de la parábola $x^2 - 4y = 0$.
27. La región interior a $y = x^2 - 4$ e interior a $y = -x^2 - 4x$.
29. La región interior a la curva $y = x^2$ e interior a la curva $y = -x^2 + 4$.
31. La región interior a la curva $y = x^2$ y exterior a la curva $y = 2x^2$.
33. La región exterior a la curva $x^2 + y^2 = 4$ e interior a la curva $x^2 + y^2 = 9$.
35. La totalidad del plano.
37. La región que es interior al triángulo con vértices (0, 0), (2, 0), (1, 4).




Problema 13
Ejercicio 10-4

## EJERCICIO 11-1 PAG. 186

. 3, 5, 7, 9; $a_{20} = 41$

. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}; \frac{1}{420}$

. $-2, 4, -8, 16; a_{20} = 2^{20}$

. $4, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{4}$

3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}; a_{20} = \frac{20}{21}$

7. $1, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{17}; a_{20} = \dfrac{2^{20}}{401}$

11. 3, 10, 24, 52

15. $-3, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}$

## EJERCICIO 11-2 PAG. 189

23, 100

$12x + 9y, 77x + 44y$

3. 156.4, 4023.9

9. 1530

5. $-182, -1462$

11. 1683

**15.** $2n(n+1)$
**17.** $-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$
**19.** $d = 3, S_n = 195$
**21.** $a_1 = -40, S_n = 198$
**23.** $d = 5, a_1 = -16$
**25.** $n = 6, a_1 = 8$ o $n = 9, a_1 = -4$
**27.** $a_1 = 8, a_{10} = -19$
**29.** 208 pies, 784 pies
**31.** \$5445
**33.** \$6405

## *EJERCICIO 11-3 PAG. 193*

**1.** 486, 728
**3.** 16, 211
**5.** 324, 220
**7.** $r = 3$
**9.** $r = -2$
**11.** $n = 5, S_n = 726$
**13.** $n = 6, S_n = 2457$
**15.** $n = 6, S_n = 94.5$
**17.** $a_1 = \frac{32}{5}, a_n = -\frac{108}{5}$
**19.** \$651.85
**21.** $256N$
**23.** 34.8%, 29
**25.** $252\frac{16}{27}$ pies

**27.** En el primer contrato se pagan \$5 800 para el quinto año y \$24 500 por todo el periodo de cinco años. En el segundo contrato se pagan \$5 856.40 por el quinto año y \$24 420.40 por todo el periodo de cinco años.

## *EJERCICIO 11-4 PAG. 197*

**1.** $\frac{3}{2}$
**3.** $41\frac{1}{4}$
**5.** $6\frac{2}{3}$
**7.** $-4.9$
**9.** $\frac{8}{9}$
**11.** $\frac{7}{33}$
**13.** $\frac{103}{33}$
**15.** $\frac{91}{111}$
**17.** $\frac{1}{7}$
**19.** $2, 1\frac{511}{512}$
**21.** 1080 pies
**23.** $\frac{1}{34}$
**25.** $\frac{1}{3}, \frac{5}{26}, \frac{5}{37}, \frac{5}{48}, \frac{5}{59}, \frac{1}{14}$
**27.** $\frac{1}{17}, \frac{1}{13}, \frac{1}{9}, \frac{1}{5}, 1$
**29.** $\frac{1}{a}, \frac{3}{2a+b}, \frac{3}{a+2b}, \frac{1}{b}$
**31.** \$5 060
**37.** $\pm 12$
**39.** $\pm x\sqrt{2}$
**41.** $4, \frac{24}{7}, \frac{24}{8}, \frac{24}{9}, \frac{24}{10}, \frac{24}{11}, 2$

## *EJERCICIO 12-1 PAG. 201*

**1.** 16, 12
**3.** 100, 48
**5.** 30 000
**7.** 1024
**9.** 120, 120
**11.** 210
**13.** 144
**15.** 420
**17.** 72, 144
**19.** 30 240; 17 280; 8640

## *EJERCICIO 12-2 PAG. 206*

**1.** 7, 210, 840, 5040
**5.** 5040; 40 320; 604 800
**7.** 60
**9.** 5040
**11.** 4320, 720
**13.** 34 560
**15.** 210; 3360; 34 650
**17.** 90 090
**19.** 13 860
**21.** 28 800; 2880
**23.** 1440, 3600

## *EJERCICIO 12-3 PAG. 209*

**1.** 465; 2600; 10,626; 1287
**3.** 2380
**5.** 36, 84
**7.** 35
**9.** 126, 256
**11.** 1960
**13.** 20 592
**15.** 800
**17.** 42
**19.** 70
**21.** 792

## EJERCICIO 12-4 PAG. 215

1. $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$
3. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{5}{16}$
7. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}$
9. $\frac{4}{32}, \frac{7}{33}, \frac{5}{11}$
11. $\frac{10}{21}, \frac{121}{126}, \frac{125}{126}$
13. $\frac{1}{221}, \frac{1}{17}, \frac{4}{17}$
15. $\frac{1}{14}, \frac{1}{4}$
17. $\frac{1}{126}$

## EJERCICIO 12-5 PAG. 218

1. $\frac{5}{6}$
3. $\frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18}$
5. $\frac{1}{2197}, \frac{27}{2197}, \frac{1}{64}$
7. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$
9. $\frac{21}{506}, \frac{63}{253}, \frac{175}{2024}$
11. $\frac{19}{30}$
13. $\frac{1}{462}, \frac{1}{462}$
15. $\frac{3}{4}, \frac{3}{16}$
17. $\frac{17}{28}, \frac{11}{18}$
19. $\frac{3}{4}$, \$375
21. \$3.60, \$4.29

## EJERCICIO 12-6 PAG. 221

1. $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}$
3. $\frac{81}{2401}, \frac{864}{2401}, \frac{1024}{2401}$
5. 0.2401, 0.4116, 0.3483
7. 2, 1

## EJERCICIO 13-1 PAG. 227

1. $8a^3 + 12a^2y + 6ay^2 + y^3$
3. $a^5 - 5a^4x + 10a^3x^2 - 10a^2x^3 + 5ax^4 - x^5$
5. $243m^5 + 405m^4n^2 + 270m^3n^4 + 90m^2n^6 + 15mn^8 + n^{10}$
7. $a^8 + 8a^7x + 28a^6x^2 + 56a^5x^3 + 70a^4x^4 + 56a^3x^5 + 28a^2x^6 + 8ax^7 + x^8$
9. $x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^4y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$
11. $\frac{a^6}{b^6} + \frac{6a^4}{b^4} + \frac{15a^2}{b^2} + 20 + \frac{15b^2}{a^2} + \frac{6b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6}$
13. $\frac{x^5}{243} - \frac{5x^4y}{162} + \frac{5x^3y^2}{36} - \frac{5x^2y^3}{36} + \frac{5xy^4}{48} - \frac{y^5}{32}$
15. $\frac{a^{12}}{4096} - \frac{3a^9}{256} + \frac{15a^6}{64} - \frac{5a^3}{2} + 15 - \frac{48}{a^3} + \frac{64}{a^6}$
17. $-35a^4x^3$
19. $-330x^4$
21. $7920a^8$
23. $-\frac{7a^5b^5}{216}$
25. $\frac{231a^6b^6}{16}$
27. $90720x^8y^4$
29. 84
31. $715x^3$
33. 1.126
35. 0.886
37. 0.851

## EJERCICIO 13-2 PAG. 229

1. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
3. $1 - y + y^2 - y^3 + \cdots$
5. $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$
7. $1 + \frac{9x}{2} + \frac{135x^2}{8} + \frac{945x^3}{16} + \cdots$
9. $1 - \frac{16x^2}{3} + \frac{224x^4}{9} - \frac{8960x^6}{81} + \cdots$

**11.** $a^{-3} - 6a^{-4}x + 24a^{-5}x^2 - 120a^{-6}x^3 + \cdots$

**13.** $2^{-11/4}\left(8 - x - \frac{3x^2}{16} - \frac{7x^3}{128} - \cdots\right)$

**15.** $3^{-22/3}[3^6 - 4(3)^4y + 14(3)^2y^2 - 140y^3 + \cdots]$

**17.** 3.04 **19.** 0.99 **21.** 0.50 **23.** 0.97

## *CAPITULO 13 EJERCICIO DE REVISION PAG. 234*

**1.** $81a^4 + 216a^3y + 216a^2y^2 + 96ay^3 + 16y^4$

**3.** $1 - 12x + 60x^2 - 160x^3 + 240x^4 - 192x^5 + 64x^6$

**5.** $\frac{x^6}{64} + \frac{3x^4}{8} + \frac{15x^2}{4} + 20 + \frac{60}{x^2} + \frac{96}{x^4} + \frac{64}{x^6}$

**7.** $\frac{y^6}{x^6} + \frac{6y^4}{x^5} + \frac{15y^2}{x^4} + \frac{20}{x^3} + \frac{15}{x^2y^2} + \frac{6}{xy^4} + \frac{1}{y^6}$

**9.** $945m^4$ **11.** $11\,430x^8y^{18}$ **13.** $3432x^{14}y^{14}$

**15.** 61 236 **17.** 1.172 **19.** 1.083

**21.** $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ **23.** $1 - \frac{4y}{3} - \frac{4y^2}{9} - \frac{32y^3}{81} - \cdots$

**25.** $\frac{1}{3^4} + \frac{4y}{3^5} + \frac{10y^2}{3^6} + \frac{20y^3}{3^7} + \cdots$

**27.** 5.10 **29.** .020 **31.** 1.16

## *EJERCICIO 14-1 PAG. 239*

**1.** 3 **3.** 0 **5.** 67

**7.** Es un factor **9.** No es un factor **11.** Es un factor

**13.** Es un factor **15.** Es un factor **17.** No es un factor

**19.** Es un factor **21.** Es un factor **23.** Es un factor

**25.** Es un factor **27.** $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

**29.** $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ **31.** $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

## *EJERCICIO 14-2 PAG. 242*

**1.** $2x^2 - 9x + 12, -11$ **3.** $x^2 + x - 7, -3$

**5.** $4x^2 - 8x + 25, 0$ **7.** $5x^2 - 2x + 11, -26$

**9.** $x^2 + 3.4$ **11.** $2x^3 + x^2 - 3x + 10, -19$

**13.** $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 6, 15$ **15.** $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 12x + 48, -191$

**17.** $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16, 0$

**19.** $x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6, -2y^7$

**21.** $-58, 2, 2$ **23.** 9, 19, 389

## EJERCICIO 14-3 PAG. 247

**1.** $-i, -4$
**3.** $5 + i, -2$
**5.** $-\sqrt{7}, 2 \pm 2i$
**7.** $1 - i\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
**9.** $-3 - i\sqrt{2}, \pm i\sqrt{6}$
**11.** $x^3 - 16x^2 + 93x - 180 = 0$
**13.** $x^4 - 10x^3 + 27x^2 + 20x - 58 = 0$
**15.** $x^4 - 12x^3 + 77x - 260x + 500 = 0$
**17.** $x^4 - 4x^3 + 19x^2 - 30x + 50 = 0$
**19.** $3, 5$
**21.** $7, 0$
**23.** $0, 3$
**25.** $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$
**27.** $x^3 - 7x - 6 = 0$
**29.** $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$
**35.** Todas reales; cuatro reales; dos imaginarias; dos reales; cuatro imaginarias; seis imaginarias

## EJERCICIO 14-4 PAG. 251

**1.** $-2, -2, 3$
**3.** $2, 2 \pm 3i$
**5.** $-\frac{1}{4}, \pm 2i$
**7.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
**9.** $-\frac{2}{3}, -1 \pm 2i$
**11.** $-2$
**13.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pm i$
**15.** $\frac{1}{2}, 2, 2, 2$
**17.** $\frac{1}{3}, 2, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
**19.** $1, 1, 2, 2, 3$
**21.** $\frac{3}{2}$
**23.** $(x + 1)(3x - 4)(2x - 1)$
**25.** $(2x + 1)(x^2 - 4x + 11)$
**27.** $(x - 1)(x + 1)(x + 2)^2$
**29.** $(x - 1)^3(x + 2)^2$

## EJERCICIO 14-6 PAG. 258

**1.** 1.51
**3.** 1.70
**5.** 2.04
**7.** 0.33
**9.** 1.08
**11.** 1.38
**13.** $-1.11, 1.25, 2.86$
**15.** $-0.11, 2.25, 3.86$
**17.** $-0.25, 1.45, 2.80$
**19.** $-0.47, 1.12, 2.35$
**21.** 1.45
**23.** 2.07

## EJERCICIO 14-7 PAG. 260

**1.** Una raíz positiva y dos raíces imaginarias.
**3.** Una raíz negativa y dos raíces imaginarias.
**5.** Tres raíces son positivas o bien una raíz es positiva y las otras imaginarias.
**7.** Una raíz es positiva, una raíz es negativa y dos raíces son imaginarias.
**9.** No hay raíz positiva. Hay cuatro raíces negativas, o dos, o ninguna. Correspondientemente habrá cero, dos o cuatro raíces imaginarias.
**11.** Habrá tres raíces positivas, o bien, una raíz positiva. Hay una raíz negativa. Por lo tanto, habrá dos o cuatro raíces imaginarias.

## EJERCICIO 15-1 PAG. 266

**1.** $13 - i$
**3.** $-2 - (1 + \sqrt{2})i$
**5.** $3 - i\sqrt{3}$
**7.** $-14 - 12i$
**9.** $-15 - 8i$
**11.** $78 + 9i\sqrt{3}$

**13.** $-1 - 5i$ **15.** $\frac{16}{25} + \frac{12}{25}i$ **17.** $\frac{11}{37} + \frac{8}{37}i$
**19.** $4 - 3i$ **21.** $i$ **23.** $8i$
**25.** $-2 + 9i$ **27.** $2$ **29.** $x = 2, y = -5$
**31.** $x = 2, y = 2$ **33.** $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{7}{2}$

## *EJERCICIO 15-2 PAG. 269*

**1.** $\sqrt{2}(\cos 45° + i\text{sen}45°)$ **3.** $4(\cos 0° + i\text{sen}0°)$
**5.** $4(\cos 300° + i\text{sen}300°)$ **7.** $2(\cos 90° + i\text{sen}90°)$
**9.** $\cos 270° + i\text{sen}270°$ **11.** $16(\cos 330° + i\text{sen}330°)$
**13.** $2\sqrt{7}(\cos 300° + i\text{sen}300°)$ **15.** $\sqrt{5}(\cos 153° + i\text{sen}153°)$
**17.** $25(\cos 254° + i\text{sen}254°)$ **19.** $\sqrt{3} + i$
**21.** $1 + i$ **23.** $-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$
**25.** $-6i$ **27.** $-0.616 + 0.788i$

## *EJERCICIO 15-3 PAG. 272*

**1.** $6i$ **3.** $-9 + 9i\sqrt{3}$ **5.** $27i$
**7.** $-2$ **9.** $\frac{7}{2} - \frac{7i\sqrt{3}}{2}$
**11.** $2\sqrt{2}(\cos 75° + i\text{sen}75°)$ **13.** $20\sqrt{2}(\cos 135° + i\text{sen}135°)$
**15.** $8\sqrt{2}(\cos 315° + i\text{sen}315°)$ **17.** $2(\cos 30° + i\text{sen}30°)$
**19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 345° + i\text{sen}345°)$

## *EJERCICIO 15-4 PAG. 275*

**1.** $9(\cos 40° + i\text{sen}40°)$ **3.** $8(\cos 354° + i\text{sen}354°)$
**5.** $\cos 80° + i\text{sen}80°$ **7.** $4\sqrt{2}(\cos 225° + i\text{sen}225°)$
**9.** $64(\cos 0° + i\text{sen}0°)$ **11.** $1024(\cos 60° + i\text{sen}60°)$
**13.** $4(\cos 40° + i\text{sen}40°), 4(\cos 220° + i\text{sen}220°)$
**15.** $3(\cos 50° + i\text{sen}50°), 3(\cos 170° + i\text{sen}170°), 3(\cos 290° + i\text{sen}290°)$
**17.** $2[\cos(70° + k \cdot 90°) + i\text{sen}(70° + k \cdot 90°)], k = 0, 1, 2, 3$
**19.** $2[\cos(15° + k \cdot 120°) + i\text{sen}(15° + k \cdot 120°)], k = 0, 1, 2$
**21.** $\cos(67.5° + k \cdot 90°) + i\text{sen}(67.5° + k \cdot 90°), k = 0, 1, 2, 3$
**23.** $2[\cos(54° + k \cdot 72°) + i\text{sen}(54° + k \cdot 72°)], k = 0, 1, 2, 3, 4$
**25.** $32 - 32i\sqrt{3}$ **27.** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **29.** $i$
**31.** $1.29 + 1.53i, -1.97 + 0.348i, 0.684 - 1.88i$
**33.** $1.59 + 1.59i, -2.17 + 0.58i, 0.58 - 2.17i$
**35.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$
**37.** $\cos(22\frac{1}{2}° + k \cdot 90°) + i\text{sen}(22\frac{1}{2}° + k \cdot 90°), k = 0, 1, 2, 3$

## *EJERCICIO 17-2 PAG. 319*

**1.** $\log 7.12 + 3 \log 78$ **3.** $\log 83 - \log 47 - \log 51$
**5.** $\frac{1}{2} \log 1.44 + 2 \log 8.23 - \log 308$
**7.** $\frac{1}{2}(\log 28 + \log 44 + \log 2 - \log 978)$
**9.** $\log 85 + \frac{1}{3} \log 67 - 2 \log 43 - \frac{1}{2} \log 65$
**11.** 0.9542 **13.** 0.7781 **15.** 1.6811
**17.** 0.5283 **19.** 0.4203 **21.** 1.9084

## *EJERCICIO 17-3 PAG. 323*

**1.** 1 **3.** 2 **5.** 2 **7.** −1 **9.** −3
**11.** −5 **13.** 3 **15.** −5 **17.** 8.634 **19.** 0.08634
**21.** 863,400 **23.** 0.08634 **25.** 0.0008634 **27.** 0.0008634

## *EJERCICIO 17-4 PAG. 326*

**1.** 0.4969 **3.** 3.6345 **5.** 0.9586 **7.** 7.9031 − 10
**9.** 7.6990 − 10 **11.** 2.9542 **13.** 9.5911 − 10 **15.** 8.9042 − 10
**17.** 309 **19.** 9.35 **21.** 7.81 **23.** 0.0448
**25.** 0.000704 **27.** 0.305 **29.** 99.9

## *EJERCICIO 17-5 PAG. 229*

**1.** 1.8341 **3.** 2.7574 **5.** 8.9941 − 10 **7.** 4.8066
**9.** 0.6836 **11.** 8.004 − 10 **13.** 4.9566 **15.** 2.3707
**17.** 6.4881 − 10 **19.** 3.2407 **21.** 3.8975 **23.** 5.8724
**25.** 594.7 **27.** 64.01 **29.** 99,650 **31.** 0.004593
**33.** 0.3079 **35.** 0.01490 **37.** 1.710 **39.** 208.0
**41.** 21,600 **43.** 0.5464 **45.** 0.008935 **47.** 0.001084

## *EJERCICIO 17-6 PAG. 331*

**1.** 233.8 **3.** 5.856 **5.** 3.260 **7.** 172.2
**9.** 24,100 **11.** 292.5 **13.** 0.4627 **15.** 2.532
**17.** 0.00002662 **19.** 4.230 **21.** 0.7822 **23.** 2.054
**25.** 7.632 **27.** 1.231 **29.** 0.002402 **31.** 0.2683
**33.** 4.250 **35.** 3.555

## *EJERCICIO 17-7 PAG. 332*

**1.** 3 **3.** 5 **5.** 2 **7.** −1
**9.** 0 **11.** 1.233 **13.** 0.8857 **15.** 2.014
**17.** 0.8414 **19.** 0 **21.** 0.04257 **23.** −1.857
**25.** 18.80 **27.** −1.366

## EJERCICIO 17-8 PAG. 339

**1.** 4.605 **3.** −0.7382 **5.** 4.701 **7.** −1.265
**9.** 2.124 **11.** −3.194 **13.** 1.100 **15.** 0.3465

## EJERCICIO 17-9 PAG. 335

**1.** (a) $267.64, (b) $268.80
**3.** (a) $567.40, (b) $570.30, (c) $572.90
**5.** 12 años
**7.** 5% por año

## EJERCICIO 18-1 PAG. 339

**1.** $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1}$

**3.** $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

**5.** $\frac{4}{3x+1} - \frac{3}{3x-1}$

**7.** $\frac{2}{3x+1} + \frac{3}{x-1}$

**9.** $\frac{5}{3x-4} - \frac{3}{x+2}$

**11.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x+2}$

**13.** $\frac{5}{x-3} - \frac{4}{x-4} + \frac{3}{x+2}$

**15.** $\frac{2}{2x+1} + \frac{27}{3x-1} - \frac{40}{4x-1}$

## EJERCICIO 18-2 PAG. 341

**1.** $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{(x-4)^2}$

**3.** $\frac{2}{x+3} + \frac{}{(x+3)^2}$

**5.** $\frac{2}{3x+1} - \frac{3}{(3x+1)^2} + \frac{5}{(3x+1)^3}$

**7.** $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

**9.** $\frac{3}{x-4} - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$

**11.** $\frac{1}{x+1} - \frac{}{(x-1)^3}$

**13.** $\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{3x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$

**15.** $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}$

## EJERCICIO 18-3 PAG. 343

**1.** $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2+5}$

**3.** $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2-3x+3}$

**5.** $\frac{4}{x-4} - \frac{3x+2}{x^2-x-5}$

**7.** $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^2+2}$

**9.** $\frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2}{x^2-x+1}$

**11.** $\frac{3x+2}{x^2+1} - \frac{2x-3}{x^2+2}$

**13.** $\frac{x+1}{2x^2+x+2} - \frac{x}{3x^2-x+1}$

# INDICE ALFABETICO


— A —

Abscisa, 75
Absoluta, desigualdad, 176
Absoluto, valor, 42
  de un número complejo, 267
Adición:
  algebraica, 42
  axioma asociativo para, 23
  axioma de conmutividad para, 23
  de fracciones, 32, 67
  de números complejos, 133, 261
  de radicales, 130
Agrandamientos sucesivos, aproximaciones por, 253
Algebra de matrices, 305
Algebra, teorema fundamental del, 243
Algebraica(s):
  expresión, 41
  fracciones, 62
Amplitud de un número complejo, 267
Antilogaritmo, 324
Armónica, progresión, 196
Asociatividad, axioma de:
  para adición, 23
  para multiplicación, 23
Axiomas, 21
  de asociatividad, 23
  de cerradura, 23
  de conmutividad, 23
  de desigualdades, 23
  de distributividad, 23
  de igualdad, 22
  de la inducción matemática, 230
  de los elementos de identidad, 24
  de los elementos inversos, 24
  de números reales, 23, 25
  de probabilidad, 212
  de un campo, 23
Axiomático, sistema, 35-37

— B —

Base:
  de un exponente, 47
  de un logaritmo, 315
Binomial, fórmula, 224
  *r*-ésimo término de, 225
Binominal, teorema, 224
  demostración del, 224, 233
Binomio, 42
  coeficientes del, 224
  cuadrado de un, 53
  cubo de un, 53
  expansión de un, 223
  *n*-ésima potencia de, 224
  serie, 228

— C —

Característica:
  de un logaritmo, 320
  regla para, 321, 322
Cero:
  como un exponente, 122
  como una identidad aditiva, 24
  de una función, 82, 237
Cerradura, axioma de, 23
Círculo, ecuación general del, 87
Coeficiente(s), 41
  binomiales, 225
  en términos de las raíces, 244, 245, 246
  matriz de los, 250

Cofactor de un elemento, 292
Combinaciones, 207
  fórmulas para, 208, 209
Complejas, fracciones, 70
Completando el cuadro, 141
Común:
  diferencia, 187
  factor, 57
  razón, 191
Comunes, logaritmos, 320
  tabla de, 324
Condicional:
  ecuación, 91
  en igualdad, 176
Conjunta, variación, 115
Conjunto, 13
  complemento de un, 17
  elemento del, 13
  finito, 14
  infinito, 14
  universal, 17
  vacío, 16
Conjuntos:
  ajenos, 18
  correspondencia uno-a-uno de, 15
  equivalentes, 15
  iguales, 15
  intersección de dos, 17
  producto de dos, 19
  unión de dos, 17
Conmutatividad, axioma de:
  para la adición, 23
  para la multiplicación, 23
Consistentes, ecuaciones, 103
Constante, 14
  de proporcionalidad, 114
  de variación, 114
Coordenada(s):
  de un punto, 76
  ejes, 75
  sistema de, 75
Coordenadas rectangulares, sistema de, 75
Correspondencia uno-a-uno, 15, 36, 77
Cuadrado(a):
  de un binomio, 53
  matriz, 304
Cuadrados, factores de la diferencia de dos, 57
Cuadrantes, 76
Cuadrática, fórmula, 141
Cubo(s):
  de un binomio, 53
  factores de la diferencia de dos, 58
  factores de la suma de dos, 58

— D —

De Moivre, teorema de, 273
Definición:
  de división, 29
  de sustracción, 28
  de una función, 78
  de una matriz, 279
  de un logaritmo, 315
Denominador, mínimo común, 67
Dependientes:
  ecuaciones, 103
  eventos, 216
Desigualdades, 173
  absolutas, 176
  axiomas de, 173
  condicionales, 176
  operaciones sobre, 177
  sistemas de, 180-182
  solución de, 176
Determinante:
  cofactor de un elemento del, 292
  definición de, 282, 286
  diagonal principal del, 286
  elemento del, 286
  expansión por cofactores, 291
  menor de un elemento de, 291
  $n$-ésimo orden, 285
  propiedades del, 286
  valor del, 282, 286
Diferencia:
  común, 187
  de dos cuadrados, 57
  de dos cubos, 58
Directa, variación, 114
Discriminante, 148
Distancia dirigida, 38
Distributividad, axioma de, 23
División:
  de fracciones, 31, 32, 63, 64, 65
  de multinomios, 50, 51, 52
  de radicales, 131
  definición de, 29
  sintética, 240
Dominio:
  de una función, 78
  de una relación, 77

— E —

Ecuación:
exponencial, 331
Ecuación cuadrática, 139
conjunto de soluciones, 139
discriminante de, 148
naturaleza de las raíces de, 148
producto de las raíces de, 149
solución gráfica de, 163, 164
solución por factorización, 139, 140
solución usando fórmula, 140, 141, 142
suma de las raíces de, 149
Ecuaciones:
condicionales, 91
consistentes, 103
cuadráticas, 139
cuadráticas, sistemas que envuelven, 159
dependientes, 103
en forma cuadrática, 144
equivalentes, 92
exponenciales, 331
inconsistentes, 103
independientes, 104
lineales, 94, 100
lineales, sistema de, 101, 106
operaciones con, 92, 93
polinomiales, 237
radicales, 146
raíces de, 92, 139
solución de, 91, 92
solución gráfica de, 101
Eje de los números reales, 36-38
Ejes, coordenadas, 75
Elemento(s):
de identidad, 24
de una matriz, 279
de una progresión, 188, 191
de un determinante, 285
inverso aditivo, 25
inverso multiplicativo, 25
Elementos inversos:
aditivos, 25
con respecto a multiplicación, 25
Eliminación:
por suma o resta, 104
por sustitución, 104
Elipse, 160
Espacio probabilístico, 210, 211
subconjunto de, 212, 213
Evento, 212
independiente, 216
probabilidad del, 212
Eventos:
dependientes, 216
independientes, 216
probabilidad de dos o más, 217, 218
Expansión:
de un binomio, 223, 224
de un determinante, 285, 291
$r$-ésimo término de un binomio, 225
Exponentes:
cero, 122
fraccionarios, 124, 125
leyes de los, 47, 49, 121, 122
negativos, 122
positivos, 121
Expresión:
algebraica, 41
racional entera, 237
Extrañas, raíces, 93, 146
Extremos:
de una progresión, 187, 190
de una proporción, 112

— F —

Factor, 41
común, 57
literal, 41
primo, 57
Factores:
de la diferencia de dos cuadrados, 57
de la diferencia de dos cubos, 58
de la suma de dos cubos, 58
Factorial($n!$), 203
Forma cuadrática, ecuación en, 144
Forma más simple de un radical, 128
Fórmula:
binomial, 224
cuadrática, 141
Fórmula de la distancia, 85
para el círculo, 85
Fracción:
impropia, 337
propia, 337
Fraccionarios, exponentes, 124, 125
Fracciones:
algebraicas, 62
complejas, 70

mínimo común denominador de, 67
multiplicación y división de, 64, 65
parciales, 337
propias e impropias, 337
reducción a términos mínimos, 62
signos de, 62
suma de, 32, 67
Función:
ceros de la, 82, 237
cuadrática, 151
definición de, 78, 79
dominio de la, 78, 79
gráfica de una, 81, 82, 252
lineal, 100
rango de la, 78
valor de la, 79
Función cuadrática, 151
gráfica de una, 151, 152
valor máximo de la, 153
valor mínimo de la, 153
Función polinomial, 152, 252
cero de, 82, 237
gráfica de una, 81, 252
Funciones parciales, 337

— G —

Grado:
de un polinomio, 50, 237
de una ecuación, 237
Gráfica:
de una ecuación cuadrática en $x$ y $y$, 159, 161
de una función, 81, 82
de una función cuadrática, 151
de una función polinomial, 252

— H —

Hipérbola, 161

— I —

Identidad, 92
elemento para la adición, 24
elemento para la multiplicación, 24
matriz, 307
Imaginaria, unidad, 134, 263
Incógnitas, 91, 101, 106
Inconsistentes, ecuaciones, 103
Inducción matemática, 229
axioma de, 230
demostración del teorema binomial por, 233
Intentos repetidos, probabilidad en, 220, 221
Interés compuesto, 334, 335
Interpolación, 326
Inversa de una matriz, 307
Inversa, variación, 115
Inversión, 285
Inverso aditivo, elemento, 25
Inverso multiplicativo, 25
Irracional:
ecuación, 146
número, 34
raíces, aproximaciones de, 253, 254

— L —

Leyes:
de exponentes, 47, 49, 121, 122, 123
de logaritmos, 317, 318
de los radicales, 127, 128
Lineales, ecuaciones, 94, 106, 107
sistemas de, 101, 106
Literal, factor, 41
Logaritmo:
base de, 315
característica de, 321
común, 320
definición de, 315
mantisa, 321
natural, 320
Logaritmo(s):
en diferentes bases, 333, 334
propiedades del, 317, 318
tablas de, 324

— M —

Matemática, inducción, 229
Matrices, álgebra de, 305
Matriz:
aumentada, 250
cuadrada, 305
de coeficientes, 250
definición de, 279
elemento de, 279
identidad, 307
inversa, 308
Media proporcional, 112
Medias:
aritméticas, 188

geométricas, 191
de una proporción, 112
Menor de un elemento, 291
Mínimo:
común denominador, 67
común múltiplo, 67
Monomio, 42
Multinomios, 42
multiplicación de, 47
Multiplicación:
axioma asociativo para, 23
axioma conmutativo para, 23
axioma distributivo para, 23
de fracciones, 64
de multinomios, 47
de radicales, 131
regla de signos para, 46
Múltiplo:
común, 67
mínimo común, 67

— N —

Natural, logaritmo, 320
Naturaleza de las raíces, 148, 149
Negativos:
exponentes, 122
números, 37
Notación científica, 321
Número complejo, 133, 261
amplitud, 267
componente imaginaria de, 134, 261
componente real de, 261
forma polar de, 268
forma rectangular de, 267
potencias de, 272
raíces de, 272
representación gráfica de, 265
valor absoluto de, 267
Número imaginario, 135
puro, 135
Número real, ejes, 36, 37, 38
Números:
axiomas de igualdad de, 23
complejos, 133, 261
imaginarios, 135
irracionales, 34
negativos, 37
positivos, 37
puramente imaginarios, 135
racionales, 34
raíces de, 272, 273
reales, 21
reales, axiomas de, 23, 24
valores absolutos de, 43, 267
Números complejos:
conjugados, 261
iguales, 261
operaciones sobre, 134, 261, 269

— O —

Operaciones:
sobre desigualdades, 176
sobre ecuaciones, 92, 93
sobre números complejos, 133, 261, 269
Origen, 36, 75
Orden:
de una matriz, 283
de un determinante, 282, 285
de un radical, 125
Ordenada, 75
pareja, 18, 75

— P —

Parábola, 151
Pareja ordenada, 18, 76
Permutaciones, 202
de cosas no todas distintas, 204
fórmulas para, 202, 205
Plano complejo, 266
Polinomio, 50, 237
ecuación, 237
grado de, 50, 237
Posición de referencia del punto decimal, 321
Positivos, números, 37
Potencias:
de i, 263
de un binomio, 53, 223, 235
de un número complejo, 272, 273
tabla de,
Primo, factor, 57
Principal, raíz, 125
Principio fundamental, 199
Probabilidad:
axiomas de, 212
de dos o más eventos, 216, 218
de un evento, 212
en intentos repetidos, 220, 221
Problemas en palabras, 96, 109

Producto:
de matrices, 305, 306
de raíces, 149
de suma y diferencia, 53
Progresión:
aritmética, 187
armónica, 196
elementos de, 189
geométrica, 191
geométrica infinita, 194
Progresión aritmética, 187
diferencia común de, 187
elementos de, 189
extremos de, 188
medias de, 188
$n$-ésimo término de, 187
suma de, 188
Progresión geométrica, 191
elementos de, 191
extremos de, 191
infinita, 194
medias de, 191
$n$-ésimo término de, 191
razón común de, 191
suma de, 192
Proporción, 112
extremos de la, 112
medios de la, 112
Proporcional:
cuarto, 112
media, 112
tercer, 112
Proporcionalidad, constante de, 114

— R —

Racional(es):
números, 34
raíces de una ecuación, 248, 249
Radicales, 125
adición y sustracción de, 130
ecuaciones, 146
forma más simple de, 128
leyes de los, 127, 128
multiplicación y división de, 131
orden de, 125
semejantes, 130
Radicando, 125
Raíces, 92
complejos conjugados, 244
extrañas, 93, 146
irracionales cuadráticas conjugadas, 245
múltiples, 244
principales, 125
racionales, 248, 249
tabla de, 379
Rango:
de la función, 78
de la relación, 77
Razón, 112
común, 191
Reales, números, 21
axiomas de igualdad, 23
axiomas para, 23, 25
Regla de los signos:
de Descartes, 258
para división, 48
para multiplicación, 46
Relación, 77
dominio de la, 77
gráfica de la, 81, 82
rango de la, 77
Residuo, teorema del, 237

— S —

Serie binomial, 228
Simplificando fracciones, 94
Sintética, división, 240
Sistema:
axiomático, 21
de coordenadas, 75
Sistemas de desigualdades, 180, 182
Sistemas de ecuaciones:
involucrando ecuaciones cuadráticas, 159
lineales, 100, 106, 296, 299
solución por gráfica, 101, 163
solución por métodos algebraicos, 103
Solución gráfica:
de sistemas de ecuaciones cuadráticas, 163
de sistemas de ecuaciones lineales, 100, 101
Solución(es):
conjunto de, 91, 139
de desigualdades, 176
de ecuaciones, 91
Subconjunto, 15
propio, 15
Sucesión, 185
finita, 185

infinita, 185
término de, 186
Suma (*véase* Adición)
Suma de una progresión, 188, 192
Sustracción, definición, 28

— T —

Tabla:
de logaritmos, 381-382
de potencia y raíces, 379
de valores de funciones trigonométricas, 380
Teorema:
binomial, 224
de De Moivre, 273
del factor, 238
del residuo, 237
fundamental del álgebra, 243
Teorema del factor, 238
recíproco, 238
Términos:
de una progresión, 187, 191
de una sucesión, 185
indefinidos, 21
mínimos de una fracción, 62, 63
semejantes, 42
Términos mínimos:
de una fracción, 62, 63
reducción, 63

— U —

Unidad imaginaria ($i$), 134, 263
potencias de, 263

— V —

Valor:
absoluto, 42, 267
de una función, 75
de un determinante, 282, 285
Valor máximo de una función cuadrática, 153, 154
Valor mínimo de una función cuadrática, 153, 154
Variable, 14
Variación:
conjunta, 115
constante, 114, 115
directa, 114
inversa, 115

# Potencias y Raíces

| No. | Cuad. | Raíz Cuad. | Cubo | Raíz cúbica | No. | Cuad. | Raíz Cuad. | Cubo | Raíz cúbica |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.000 | 1 | 1.000 | 51 | 2,601 | 7.141 | 132 651 | 3.708 |
| 2 | 4 | 1.414 | 8 | 1.260 | 52 | 2,704 | 7.211 | 140 608 | 3.733 |
| 3 | 9 | 1.732 | 27 | 1.442 | 53 | 2,809 | 7.280 | 148 877 | 3.756 |
| 4 | 16 | 2.000 | 64 | 1.587 | 54 | 2,916 | 7.348 | 157 464 | 3.780 |
| 5 | 25 | 2.236 | 125 | 1.710 | 55 | 3,025 | 7.416 | 166 375 | 3.803 |
| 6 | 36 | 2.449 | 216 | 1.817 | 56 | 3,136 | 7.483 | 175 616 | 3.826 |
| 7 | 49 | 2.646 | 343 | 1.913 | 57 | 3,249 | 7.550 | 185 193 | 3.849 |
| 8 | 64 | 2.828 | 512 | 2.000 | 58 | 3,364 | 7.616 | 195 112 | 3.871 |
| 9 | 81 | 3.000 | 729 | 2.080 | 59 | 3,481 | 7.681 | 205 379 | 3.893 |
| 10 | 100 | 3.162 | 1,000 | 2.154 | 60 | 3,600 | 7.746 | 216 000 | 3.915 |
| 11 | 121 | 3.317 | 1,331 | 2.224 | 61 | 3,721 | 7.810 | 226 981 | 3.936 |
| 12 | 144 | 3.464 | 1,728 | 2.289 | 62 | 3,844 | 7.874 | 238 328 | 3.956 |
| 13 | 169 | 3.606 | 2,197 | 2.351 | 63 | 3,969 | 7.937 | 250 047 | 3.979 |
| 14 | 196 | 3.742 | 2,744 | 2.410 | 64 | 4,096 | 8.000 | 262 144 | 4.000 |
| 15 | 225 | 3.873 | 3,375 | 2.466 | 65 | 4,225 | 8.062 | 274 625 | 4.021 |
| 16 | 256 | 4.000 | 4,096 | 2.520 | 66 | 4,356 | 8.124 | 287 496 | 4.041 |
| 17 | 289 | 4.123 | 4,913 | 2.571 | 67 | 4,489 | 8.185 | 300 763 | 4.062 |
| 18 | 324 | 4.243 | 5,832 | 2.621 | 68 | 4,624 | 8.246 | 314 432 | 4.082 |
| 19 | 361 | 4.359 | 6,859 | 2.668 | 69 | 4,761 | 8.307 | 328 509 | 4.102 |
| 20 | 400 | 4.472 | 8,000 | 2.714 | 70 | 4,900 | 8.367 | 343 000 | 4.121 |
| 21 | 441 | 4.583 | 9,261 | 2.759 | 71 | 5,041 | 8.426 | 357 911 | 4.141 |
| 22 | 484 | 4.690 | 10,648 | 2.802 | 72 | 5,184 | 8.485 | 373 248 | 4.160 |
| 23 | 529 | 4.796 | 12,167 | 2.844 | 73 | 5,329 | 8.544 | 389 017 | 4.179 |
| 24 | 576 | 4.899 | 13,824 | 2.884 | 74 | 5,476 | 8.602 | 405 224 | 4.198 |
| 25 | 625 | 5.000 | 15,625 | 2.924 | 75 | 5,625 | 8.660 | 421 875 | 4.217 |
| 26 | 676 | 5.099 | 17,576 | 2.962 | 76 | 5,776 | 8.718 | 438 976 | 4.236 |
| 27 | 729 | 5.196 | 19,683 | 3.000 | 77 | 5,929 | 8.775 | 456 533 | 4.254 |
| 28 | 784 | 5.292 | 21,952 | 3.037 | 78 | 6,084 | 8.832 | 474 552 | 4.273 |
| 29 | 841 | 5.385 | 24,389 | 3.072 | 79 | 6,241 | 8.888 | 493 039 | 4.291 |
| 30 | 900 | 5.477 | 27,000 | 3.107 | 80 | 6,400 | 8.944 | 512 000 | 4.309 |
| 31 | 961 | 5.568 | 29,791 | 3.141 | 81 | 6,561 | 9.000 | 531 441 | 4.327 |
| 32 | 1,024 | 5.657 | 32,768 | 3.175 | 82 | 6,724 | 9.055 | 551 368 | 4.344 |
| 33 | 1,089 | 5.745 | 35,937 | 3.208 | 83 | 6,889 | 9.110 | 571 787 | 4.362 |
| 34 | 1,156 | 5.831 | 39,304 | 3.240 | 84 | 7,056 | 9.165 | 592 704 | 4.380 |
| 35 | 1,225 | 5.916 | 42,875 | 3.271 | 85 | 7,225 | 9.220 | 614 125 | 4.397 |
| 36 | 1,296 | 6.000 | 46,656 | 3.302 | 86 | 7,396 | 9.274 | 636 056 | 4.414 |
| 37 | 1,369 | 6.083 | 50,653 | 3.332 | 87 | 7,569 | 9.327 | 658 503 | 4.431 |
| 38 | 1,444 | 6.164 | 54,872 | 3.362 | 88 | 7,744 | 9.381 | 681 472 | 4.448 |
| 39 | 1,521 | 6.245 | 59,319 | 3.391 | 89 | 7,921 | 9.434 | 704 969 | 4.465 |
| 40 | 1,600 | 6.325 | 64,000 | 3.420 | 90 | 8,100 | 9.487 | 729 000 | 4.481 |
| 41 | 1,681 | 6.403 | 68,921 | 3.448 | 91 | 8,281 | 9.539 | 753 571 | 4.498 |
| 42 | 1,764 | 6.481 | 74,088 | 3.476 | 92 | 8,464 | 9.592 | 778 688 | 4.514 |
| 43 | 1,849 | 6.557 | 79,507 | 3.503 | 93 | 8,649 | 9.644 | 804 357 | 4.531 |
| 44 | 1,936 | 6.633 | 85,184 | 3.530 | 94 | 8,836 | 9.695 | 830 584 | 4.547 |
| 45 | 2,025 | 6.708 | 91,125 | 3.557 | 95 | 9,025 | 9.747 | 857 375 | 4.563 |
| 46 | 2,116 | 6.782 | 97,336 | 3.583 | 96 | 9,216 | 9.798 | 884 736 | 4.579 |
| 47 | 2,209 | 6.856 | 103,823 | 3.609 | 97 | 9,409 | 9.849 | 912 673 | 4.595 |
| 48 | 2,304 | 6.928 | 110,592 | 3.634 | 98 | 9,604 | 9.899 | 941 192 | 4.610 |
| 49 | 2,401 | 7.000 | 117,649 | 3.659 | 99 | 9,801 | 9.950 | 970 299 | 4.626 |
| 50 | 2,500 | 7.071 | 125,000 | 3.684 | 100 | 10,000 | 10.000 | 1,000 000 | 4.642 |

Senos y tangentes, léanse hacia abajo
Cosenos y cotangentes, léanse hacia arriba

| ∠ | sen | | tan | | | ∠ | sen | | tan | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | .0000 | .0175 | .0000 | .0175 | 89° | 45° | .7071 | .7193 | 1.000 | 1.036 | 44° |
| 1° | .0175 | .0349 | .0175 | .0349 | 88° | 46° | .7193 | .7314 | 1.036 | 1.072 | 43° |
| 2° | .0349 | .0523 | .0349 | .0524 | 87° | 47° | .7314 | .7431 | 1.072 | 1.111 | 42° |
| 3° | .0523 | .0698 | .0524 | .0699 | 86° | 48° | .7431 | .7547 | 1.111 | 1.150 | 41° |
| 4° | .0698 | .0872 | .0699 | .0875 | 85° | 49° | .7547 | .7660 | 1.150 | 1.192 | 40° |
| 5° | .0872 | .1045 | .0875 | .1051 | 84° | 50° | .7660 | .7771 | 1.192 | 1.235 | 39° |
| 6° | .1045 | .1219 | .1051 | .1228 | 83° | 51° | .7771 | .7880 | 1.235 | 1.280 | 38° |
| 7° | .1219 | .1392 | .1228 | .1405 | 82° | 52° | .7880 | .7986 | 1.280 | 1.327 | 37° |
| 8° | .1392 | .1564 | .1405 | .1584 | 81° | 53° | .7986 | .8090 | 1.327 | 1.376 | 36° |
| 9° | .1564 | .1736 | .1584 | .1763 | 80° | 54° | .8090 | .8192 | 1.376 | 1.428 | 35° |
| 10° | .1736 | .1908 | .1763 | .1944 | 79° | 55° | .8192 | .8290 | 1.428 | 1.483 | 34° |
| 11° | .1908 | .2079 | .1944 | .2126 | 78° | 56° | .8290 | .8387 | 1.483 | 1.540 | 33° |
| 12° | .2079 | .2250 | .2126 | .2309 | 77° | 57° | .8387 | .8480 | 1.540 | 1.600 | 32° |
| 13° | .2250 | .2419 | .2309 | .2493 | 76° | 58° | .8480 | .8572 | 1.600 | 1.664 | 31° |
| 14° | .2419 | .2588 | .2493 | .2679 | 75° | 59° | .8572 | .8660 | 1.664 | 1.732 | 30° |
| 15° | .2588 | .2756 | .2679 | .2867 | 74° | 60° | .8660 | .8746 | 1.732 | 1.804 | 29° |
| 16° | .2756 | .2924 | .2867 | .3057 | 73° | 61° | .8746 | .8829 | 1.804 | 1.881 | 28° |
| 17° | .2924 | .3090 | .3057 | .3249 | 72° | 62° | .8829 | .8910 | 1.881 | 1.963 | 27° |
| 18° | .3090 | .3256 | .3249 | .3443 | 71° | 63° | .8910 | .8988 | 1.963 | 2.050 | 26° |
| 19° | .3256 | .3420 | .3443 | .3640 | 70° | 64° | .8988 | .9063 | 2.050 | 2.145 | 25° |
| 20° | .3420 | .3584 | .3640 | .3839 | 69° | 65° | .9063 | .9135 | 2.145 | 2.246 | 24° |
| 21° | .3584 | .3746 | .3839 | .4040 | 68° | 66° | .9135 | .9205 | 2.246 | 2.356 | 23° |
| 22° | .3746 | .3907 | .4040 | .4245 | 67° | 67° | .9205 | .9272 | 2.356 | 2.475 | 22° |
| 23° | .3907 | .4067 | .4245 | .4452 | 66° | 68° | .9272 | .9336 | 2.475 | 2.605 | 21° |
| 24° | .4067 | .4226 | .4452 | .4663 | 65° | 69° | .9336 | .9397 | 2.605 | 2.747 | 20° |
| 25° | .4226 | .4384 | .4663 | .4877 | 64° | 70° | .9397 | .9455 | 2.747 | 2.904 | 19° |
| 26° | .4384 | .4540 | .4877 | .5095 | 63° | 71° | .9455 | .9511 | 2.904 | 3.078 | 18° |
| 27° | .4540 | .4695 | .5095 | .5317 | 62° | 72° | .9511 | .9563 | 3.078 | 3.271 | 17° |
| 28° | .4695 | .4848 | .5317 | .5543 | 61° | 73° | .9563 | .9613 | 3.271 | 3.487 | 16° |
| 29° | .4848 | .5000 | .5543 | .5774 | 60° | 74° | .9613 | .9659 | 3.487 | 3.732 | 15° |
| 30° | .5000 | .5150 | .5774 | .6009 | 59° | 75° | .9659 | .9703 | 3.732 | 4.011 | 14° |
| 31° | .5150 | .5299 | .6009 | .6249 | 58° | 76° | .9703 | .9744 | 4.011 | 4.331 | 13° |
| 32° | .5299 | .5446 | .6249 | .6494 | 57° | 77° | .9744 | .9781 | 4.331 | 4.705 | 12° |
| 33° | .5446 | .5592 | .6494 | .6745 | 56° | 78° | .9781 | .9816 | 4.705 | 5.145 | 11° |
| 34° | .5592 | .5736 | .6745 | .7002 | 55° | 79° | .9816 | .9848 | 5.145 | 5.671 | 10° |
| 35° | .5736 | .5878 | .7002 | .7265 | 54° | 80° | .9848 | .9877 | 5.671 | 6.314 | 9° |
| 36° | .5878 | .6018 | .7265 | .7536 | 53° | 81° | .9877 | .9903 | 6.314 | 7.115 | 8° |
| 37° | .6018 | .6157 | .7536 | .7813 | 52° | 82° | .9903 | .9925 | 7.115 | 8.144 | 7° |
| 38° | .6157 | .6293 | .7813 | .8098 | 51° | 83° | .9925 | .9945 | 8.144 | 9.514 | 6° |
| 39° | .6293 | .6428 | .8098 | .8391 | 50° | 84° | .9945 | .9962 | 9.514 | 11.43 | 5° |
| 40° | .6428 | .6561 | .8391 | .8693 | 49° | 85° | .9962 | .9976 | 11.43 | 14.30 | 4° |
| 41° | .6561 | .6691 | .8693 | .9004 | 48° | 86° | .9976 | .9986 | 14.30 | 19.08 | 3° |
| 42° | .6691 | .6820 | .9004 | .9325 | 47° | 87° | .9986 | .9994 | 19.08 | 28.64 | 2° |
| 43° | .6820 | .6947 | .9325 | .9657 | 46° | 88° | .9994 | .9998 | 28.64 | 57.29 | 1° |
| 44° | .6947 | .7071 | .9657 | 1.000 | 45° | 89° | .9998 | 1.000 | 57.29 | ∞ | 0° |
| | | cos | | cot | ∠ | | | cos | | cot | ∠ |

# Logaritmos Comunes

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3463 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |


| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Logaritmos Comunes

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |